

## 渐开线圆柱齿轮的参数化建模与接触等几何分析

刘梦婵<sup>1)</sup>, 张冉<sup>1)</sup>, 杜孝孝<sup>1,2)\*</sup>, 王伟<sup>1,2)</sup>, 赵罡<sup>1,2)</sup>

<sup>1)</sup> (北京航空航天大学机械工程及自动化学院 北京 100191)

<sup>2)</sup> (航空高端装备智能制造工信部重点实验室 北京 100191)

(duxiaoxiao@buaa.edu.cn)

**摘要:** 渐开线圆柱齿轮的齿面接触力学性能是保障齿轮传动稳定性和可靠性的关键, 针对传统有限元方法设计仿真割裂带来的接触计算流程复杂和精度较低等问题, 提出一种基于 NURBS 表达的渐开线圆柱齿轮参数化建模及单齿啮合等几何接触仿真方法. 首先根据齿轮几何设计参数采用最小二乘法拟合方法重构齿轮轮廓曲线, 再分片构造齿轮平面模型, 对平面模型进行偏置创建面向等几何分析的 NURBS 实体参数化模型; 然后基于点面法详细推导二维齿轮平面模型和三维齿轮实体模型的无摩擦等几何接触计算相关公式; 最后通过数值仿真算例, 将等几何计算结果与商业软件计算结果进行对比, 验证了所提方法在齿轮接触计算中的有效性. 结果表明, 该方法在齿轮接触数值计算方面展现出了更优的收敛效果, 为齿轮的接触分析和设计仿真一体化提供了一种有效的解决方案.

**关键词:** 渐开线圆柱齿轮; 接触计算; 等几何分析; 参数化建模

**中图分类号:** TP391.41 **DOI:** 10.3724/SP.J.1089.2024-00482

## Parametric Modeling and Isogeometric Contact Analysis of Cylindrical Involute Gear

Liu Mengchan<sup>1)</sup>, Zhang Ran<sup>1)</sup>, Du Xiaoxiao<sup>1,2)\*</sup>, Wang Wei<sup>1,2)</sup>, and Zhao Gang<sup>1,2)</sup>

<sup>1)</sup> (School of Mechanical Engineering & Automation, Beihang University, Beijing 100191)

<sup>2)</sup> (Key Laboratory of Aeronautics Smart Manufacturing, Ministry of Industry and Information Technology, Beijing 100191)

**Abstract:** The mechanical contact properties of tooth surfaces in cylindrical involute gears are critical for ensuring the stability and reliability of gear transmission systems. To address the challenges of complex contact calculations and the limited accuracy caused by the separation of design and simulation in traditional finite element methods, this paper proposes a parametric modeling approach using NURBS (non-uniform rational B-splines) and an isogeometric contact simulation method for gear meshing behavior. First, the gear profile curve is reconstructed based on geometric design parameters using the least squares fitting method. A multi-patch gear plane model derived from the reconstructed curve is then offset to create a NURBS-based solid parametric model for isogeometric analysis. Detailed formulations for frictionless isogeometric contact calculations of both two-dimensional gear plane models and three-dimensional solid models are developed using the node-to-surface method. Finally, numerical simulations validate the proposed approach by comparing isogeometric results with those obtained from commercial software. The findings highlight the method's superior convergence in gear contact calculations, offering a robust solution for accurate gear con-

收稿日期: 2024-08-20; 修回日期: 2025-01-14. 基金项目: 国家自然科学基金(62102012, 52175213); 北京市自然科学基金(4242025); 国家重点研发计划(2023YFB3309000). 刘梦婵(2002—), 女, 硕士研究生, CCF 学生会员, 主要研究方向为 CAD/CAE; 张冉(1994—), 女, 博士, 主要研究方向为 CAD/CAE; 杜孝孝(1991—), 男, 博士, 助理教授, 硕士生导师, CCF 会员, 论文通信作者, 主要研究方向为 CAD/CAE; 王伟(1978—), 男, 博士, 副教授, 博士生导师, 主要研究方向为 CAD/CAE; 赵罡(1972—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为智能制造、数字化装配、CAD/CAM.

tact analysis and the seamless unification of design and simulation.

**Key words:** cylindrical involute gear; contact calculation; isogeometric analysis; parametric modeling

渐开线圆柱齿轮是现代设备中应用广泛的机械传动零件<sup>[1]</sup>, 通过齿面相互接触实现机械传动, 其齿面的力学性能直接影响齿轮传动的稳定性和可靠性, 并对齿轮的使用寿命产生决定性影响<sup>[2-3]</sup>. 当前, 有限元分析(finite element analysis, FEA)作为一种有效的数值分析方法, 被广泛应用于齿轮传动过程齿面接触的分析计算<sup>[4-5]</sup>. 然而, 基于有限元方法的接触计算精度对网格质量的依赖性较高<sup>[6]</sup>. 在网格剖分过程中, 通过几何设计得到的光滑传动齿面被近似地离散为若干低阶连续的分析单元用于数值仿真. 过大的网格划分, 在引入几何逼近误差的同时导致计算精度的降低; 而过小的网格划分, 将会导致计算量的指数级增加. 因此, 探索更高精度、更高效率的齿轮接触计算方法具有实际应用价值.

Hughes 等<sup>[7]</sup>提出等几何分析(isogeometric analysis, IGA)方法, 为解决齿轮接触问题提供了新思路. IGA 方法将 CAD 模型高阶连续的 NURBS 基函数视作形函数, 以 NURBS 曲线段、曲面片或曲体块作为网格单元, 将 NURBS 控制顶点作为结点, 避免了 FEA 方法中的网格剖分过程<sup>[8]</sup>. 因此, 此类方法不仅能实现几何模型和分析模型的表达一致性, 同时天然地满足接触边界对高阶连续性的要求, 有利于接触力的精确传递和接触计算的快速收敛, 与 FEA 方法相比, IGA 方法在计算精度和收敛速度等方面具有独特的优势. Lu<sup>[9]</sup>, Temizer 等<sup>[10]</sup>和 de Lorenzis 等<sup>[11]</sup>最早基于 NURBS 几何模型研究一般接触问题的 IGA, 数值结果表明, 与 FEA 相比, IGA 具有更高的精度, 能够缓解接触力的非物理振荡. 近年来, Pi 等<sup>[12-13]</sup>基于 IGA 方法对具有多个旋转间隙接头的平面机构进行动力学研究, 通过与常规方法进行对比, 验证了该方法的正确性和高效性; Bidkhorji 等<sup>[14]</sup>提出一种新的自适应等几何接触分析方法, 通过多个算例验证了该方法的有效性和收敛性; Wang 等<sup>[15]</sup>提出一种基于可分析 T 样条的自适应局部网格细化方法, 可以提高柔性多体系统接触分析的计算效率, 并验证了该方法的可行性; Khanyile 等<sup>[16]</sup>基于几何接触算法计算声学响应, 模拟板受冲击时发出的噪声并预测板的振动和辐射效果; Zhao 等<sup>[17]</sup>和 Zhang 等<sup>[18]</sup>基于 IGA 研究二维平面结构和三维薄壳结构的接

触约束施加方法, 以及大变形摩擦接触计算, 进一步验证了 IGA 在摩擦接触计算中的可靠性; 针对齿轮等几何计算, 陈龙等<sup>[19-20]</sup>研究单齿啮合的等几何接触计算, 将计算结果与理论值和商业软件计算结果进行对比, 验证了 IGA 在接触分析方面的优势, 为齿轮的接触分析提供一种有效方法; 薛雨彤等<sup>[21]</sup>提出基于 IGA 的齿轮弯曲强度分析算法, 将该方法的计算结果与理论值和 FEA 结果对比, 验证了 IGA 在分析齿轮齿根弯曲应力时具有较高的精度和效率, 为求解齿根弯曲强度问题提供一种有效方法.

三变量参数化实体建模是 IGA 走向实际应用过程中面临的挑战性难题之一. 现有商用 CAD 软件设计的三维几何模型多采用边界表示(boundary representation, B-Rep)方法表达, 仅对实体表面建模而缺乏内部参数定义, 需要赋予内部实体物理信息才能完成物性计算和仿真分析. 之后, 由 B-Rep 模型构造面向 IGA 的精确参数实体模型成为 IGA 研究的热点方向之一. Aigner 等<sup>[22]</sup>提出一种通过扫掠封闭曲线生成扫掠实体的 NURBS 参数化方法, 并对生成的 NURBS 模型进行等距分析; Zhang 等<sup>[23]</sup>提出一种为患者特定的血管几何模型构建 NURBS 实体的方法, 并用于 IGA; Martin 等<sup>[24]</sup>开发了一套由零亏格拓扑三角形网格构建三变量 B 样条模型的框架; Escobar 等<sup>[25]</sup>提出一种基于曲面三角剖分优化的实体 T 样条建模算法; Zhang 等<sup>[26]</sup>提出一种利用边界曲面三角剖分构造复杂零亏格几何有理 T 样条实体的新方法, 并通过实例验证了该方法的鲁棒性; Xu 等<sup>[27-28]</sup>研究面向 IGA 的以 B 样条曲面为边界的多块计算域的体参数化问题, 通过多个算例验证了所提方法的有效性; Pan 等<sup>[29]</sup>提出一种基于低秩张量近似技术的体积域低秩样条参数化方法, 大量实验结果表明, 该方法不仅产生低秩的参数化, 而且达到了令人满意的参数化质量; Ji 等<sup>[30]</sup>提出一种基于惩罚函数思想和雅可比正则化技术的体参数化方法, 通过数值实例验证了该方法的有效性和鲁棒性; Zhan 等<sup>[31]</sup>提出一种基于深度神经网络的参数化连接平面计算域的边界和内部的方法, 实验结果表明, 该方法具有更低的失真和更高的双射率比; Qin 等<sup>[32]</sup>提出了一种称为广义贝塞尔体的多面体建模新方法, 并给出了

多个实例.

分析上述文献可以发现, IGA 在接触计算中已经吸引了大量研究者的关注, 面向 IGA 的参数化样条实体建模技术也得到了众多学者的深入研究. 本文从 CAD/CAE 一体化的视角, 探索等几何框架下的渐开线圆柱齿轮参数化实体建模和接触计算方法. 首先给定几何设计参数, 驱动渐开线圆柱齿轮在给定误差条件下的自动参数化实体建模; 其次研究基于点面法和接触搜索策略的线弹性齿面接触等几何计算; 最后探索齿轮几何设计参数对齿轮接触计算的影响. 以为渐开线圆柱齿轮的接触设计和强度校核提供新的可选方案, 为齿轮设计分析的一体化和智能化奠定基础.

### 1 渐开线圆柱齿轮轮廓方程

渐开线圆柱齿轮的基本参数包括齿数  $z$ , 模数  $m$ , 分度圆压力角  $\alpha$ , 齿顶高系数  $h_a^* = 1$ , 顶隙系数  $c^* = 0.25$ , 齿宽  $B$  等. 如图 1 所示, 齿轮轮廓曲线由 4 段简单曲线组成: 齿顶圆圆弧  $AB$ , 渐开线  $BC$ , 齿根过渡曲线  $CD$  和齿根圆弧  $DE$ <sup>[33]</sup>. 下面依次建立这 4 段曲线的参数方程.

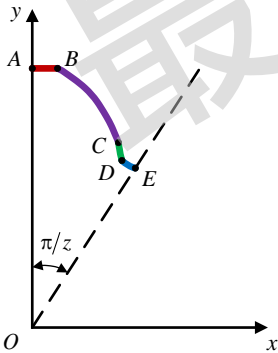


图 1 渐开线圆柱齿轮的轮廓曲线

如图 2 所示,  $AB$  曲线是一段齿顶圆圆弧, 其参数方程为

$$\begin{cases} x = r_a \sin \psi \\ y = r_a \cos \psi \end{cases}$$

其中,  $\psi$  表示变参数, 取值范围为

$$0 \leq \psi \leq \frac{\varphi_a}{2};$$

$r_a$  表示齿顶圆半径, 公式为

$$r_a = \frac{1}{2} m (z + 2h_a^*);$$

$\varphi_a$  表示齿顶圆齿厚对应的中心角, 公式为

$$\varphi_a = 2 \left( \frac{\pi}{2z} + \text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha_a \right);$$

$\alpha_a$  表示齿顶圆压力角, 公式为

$$\alpha_a = \arccos \left( \frac{r_b}{r_a} \right).$$

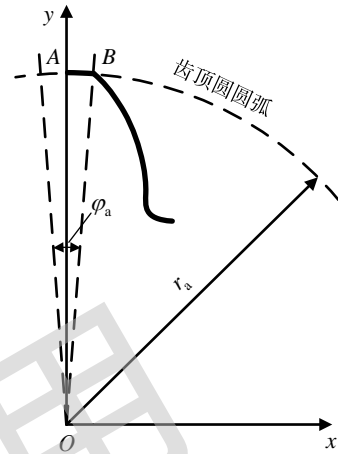


图 2 齿顶圆圆弧  $AB$

如图 3 所示,  $BC$  曲线段为渐开线,  $K$  为曲线上任意一点, 该点的向径  $r_K$  与  $y$  轴的夹角为  $\varphi_K$ , 易知渐开线的参数方程为

$$\begin{cases} x = r_K \sin \varphi_K \\ y = r_K \cos \varphi_K \end{cases}$$

其中,

$$r_K = \frac{r_b}{\cos \alpha_K};$$

$$\varphi_K = \theta + \varphi - \theta_K = \text{inv} \alpha + \varphi - \text{inv} \alpha_K.$$

$\varphi$  表示分度圆齿弧对应的中心角的一半, 公式为

$$\varphi = \frac{\pi}{2z};$$

$r_b$  表示基圆半径, 公式为

$$r_b = r \cos \alpha;$$

$r$  表示分度圆半径, 公式为

$$r = \frac{1}{2} mz;$$

$\alpha_K$  表示变参数, 其取值范围为

$$\alpha_C \leq \alpha_K \leq \alpha_B;$$

$\alpha_C, \alpha_B$  可由

$$\begin{cases} \text{inv} \alpha_C = \varphi + \text{inv} \alpha - \arctan \left( \frac{x_C}{y_C} \right) \\ \text{inv} \alpha_B = \varphi + \text{inv} \alpha - \arctan \left( \frac{x_B}{y_B} \right) \end{cases}$$

求出.

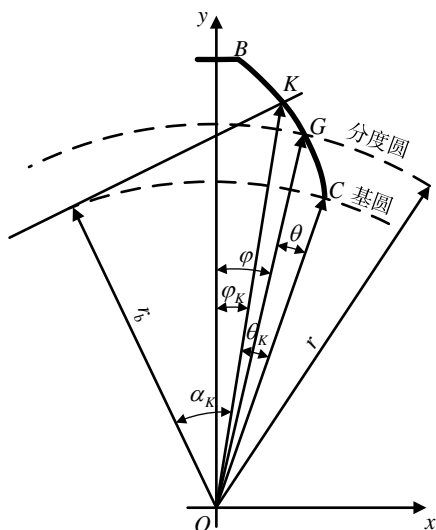


图 3 渐开线 BC

如图 4 所示, 齿根过渡曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi - \left( \frac{a}{\sin \psi} + \rho \right) \cos(\psi - \varphi) \\ y = r \cos \varphi - \left( \frac{a}{\sin \psi} + \rho \right) \sin(\psi - \varphi) \end{cases}$$

其中,

$$\varphi = \frac{1}{r} \left( \frac{a}{\tan \psi} + b \right)$$

如图 5 所示,  $a$  表示刀具顶部圆角的圆心  $C_\rho$  距中线的距离, 公式为

$$a = h_a^* m + c^* m - \rho;$$

$b$  表示刀具顶部圆角圆心距刀具齿槽中心线的距离, 公式为

$$b = \frac{\pi m}{4} + h_a^* m \tan \alpha + \rho \cos \alpha;$$

$\rho$  表示刀具顶部圆角半径, 公式为

$$\rho = \frac{c^* m}{1 - \sin \alpha}.$$

$\psi$  表示变参数, 其取值范围为

$$\alpha \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}.$$

当  $\psi = \alpha$  时, 对应的是  $C$  点; 当  $\psi = \pi/2$  时, 对应的是  $D$  点.

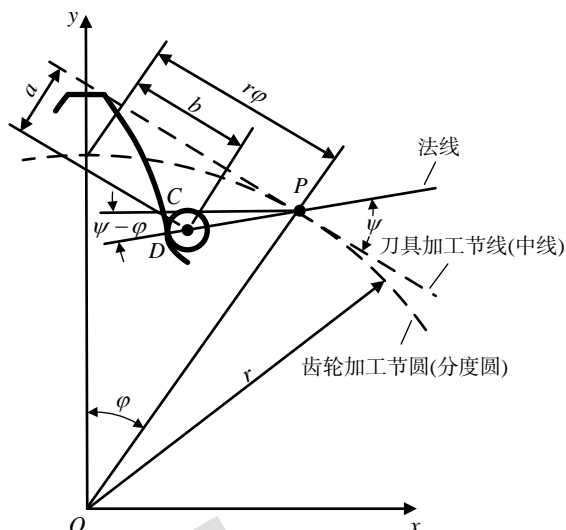


图 4 齿根过渡曲线 CD

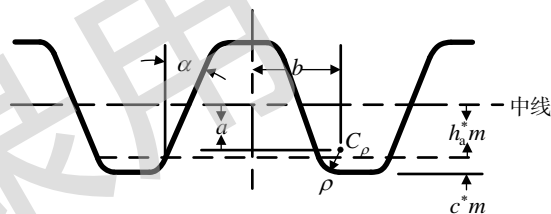


图 5 齿条型刀具齿廓示意图

$DE$  曲线是一段齿顶圆圆弧, 其参数方程为

$$\begin{cases} x = r_f \sin \psi \\ y = r_f \cos \psi \end{cases}$$

其中,  $\psi$  的取值范围为

$$\arctan \left( \frac{x_D}{y_D} \right) \leq \psi \leq \frac{\pi}{z};$$

$r_f$  表示齿根圆半径, 公式为

$$r_f = \frac{1}{2} m (z - 2h_a^* - 2c^*).$$

## 2 基于 NURBS 的渐开线圆柱齿轮参数化建模

### 2.1 NURBS 曲线曲面和实体表达

首先介绍 B 样条基函数的递推公式和 B 样条曲线, 然后介绍 NURBS 曲线曲面和实体的数学表达.

B 样条基函数有多种定义方法, 本文只介绍作为标准算法的 de Boor-Cox 递推公式.

令非递减序列  $\xi = [\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n_\xi + p + 1}]$ , 其中,  $\xi_i$  称为节点,  $\xi$  称为节点矢量, 半开区间  $[\xi_i, \xi_{i+1})$  称为第  $i$  个节点区间,  $n_\xi + 1$  表示  $\xi$  方向的控制顶点总数,  $p$  表示 B 样条曲线的次数. 在  $\xi$  上, 根据

de Boor-Cox 递推定义, B 样条基函数构造如下<sup>[34-35]</sup>

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi)$$

$$\frac{0}{0} := 0$$

其中,  $N_{i,p}(\xi)$  表示第  $i$  个  $p$  次基函数. 可知, B 样条基函数具有局部支撑性, 即  $N_{i,p}(\xi)$  仅在区间  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$  上有大于 0 的值, 在此区间外均为 0; 且 B 样条基函数在节点区间内部是无限次可微的, 即参数连续性为  $C^\infty$ , 在节点处是  $p-r$  次可微, 即参数连续性为  $C^{p-r}$ , 其中,  $r$  为节点重复度.

B 样条曲线由 B 样条基函数和控制顶点线性组合确定, 在上述基础上, 设有一组控制顶点  $\mathbf{Q} = \{\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_{n_\xi}\}$ , 则  $p$  次 B 样条曲线的表达式为

$$\mathbf{p}(\xi) = \sum_{i=0}^{n_\xi} \mathbf{Q}_i N_{i,p}(\xi).$$

NURBS 引入权因子  $\omega$ , 每个控制顶点  $\mathbf{Q}_i$  均有相应的  $\omega_i (i=0, 1, \dots, n_\xi)$ , 则一条  $p$  次 NURBS 曲线可表达为

$$\mathbf{C}(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^{n_\xi} \mathbf{Q}_i \omega_i N_{i,p}(\xi)}{\sum_{r=0}^{n_\xi} \omega_r N_{r,p}(\xi)} \quad (1)$$

令

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) \omega_i}{\sum_{r=0}^{n_\xi} N_{r,p}(\xi) \omega_r}$$

$R_{i,p}(\xi)$  称为  $p$  次 NURBS 有理基函数, 其具有与 B 样条基函数相似的性质.

故式(1)可改写成

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=0}^{n_\xi} \mathbf{Q}_i R_{i,p}(\xi).$$

类似地, NURBS 曲面及其有理基函数可表达为

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{n_\xi} \sum_{j=0}^{n_\eta} \mathbf{Q}_{i,j} R_{i,p,j,q}(\xi, \eta),$$

$$R_{i,p,j,q}(\xi, \eta) = \frac{\omega_{i,j} N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta)}{\sum_{r=0}^{n_\xi} \sum_{s=0}^{n_\eta} \omega_{r,s} N_{r,p}(\xi) N_{s,q}(\eta)}$$

同理, NURBS 实体及其有理基函数可表达为

$$\mathbf{V}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^{n_\xi} \sum_{j=0}^{n_\eta} \sum_{h=0}^{n_\zeta} \mathbf{Q}_{i,j,h} R_{i,p,j,q,h,k}(\xi, \eta, \zeta),$$

$$R_{i,p,j,q,h,k}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\omega_{i,j,h} N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) N_{h,k}(\zeta)}{\sum_{r=0}^{n_\xi} \sum_{s=0}^{n_\eta} \sum_{t=0}^{n_\zeta} \omega_{r,s,t} N_{r,p}(\xi) N_{s,q}(\eta) N_{t,k}(\zeta)}$$

## 2.2 基于 NURBS 的齿轮轮廓线重构

对于齿顶圆圆弧和齿根圆圆弧, 可采用 NURBS 曲线精确表达, 而渐开线和齿根过渡曲线需要进行 NURBS 曲线拟合. 本文采用最小二乘法进行曲线拟合, 设拟合曲线为  $p$  次 NURBS 曲线

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=0}^n \mathbf{Q}_i R_{i,p}(\xi), \quad \xi \in [0, 1], \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

首先给定  $M+1$  个有序数据点  $\mathbf{q}_i (i=0, 1, \dots, M)$ , 采用弦长参数化求出每个点处的参数值  $\bar{\xi}_i$ , 公式为

$$\begin{cases} \bar{\xi}_0 = 0 \\ \bar{\xi}_i = \bar{\xi}_{i-1} + \frac{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i-1}|}{d}, \quad i = 1, 2, \dots, M-1. \\ \bar{\xi}_M = 1 \end{cases}$$

其中,  $d$  表示总弦长,  $d = \sum_{i=1}^M |\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i-1}|$ . 拟合曲线满足端点约束, 即  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{C}(0)$ ,  $\mathbf{q}_M = \mathbf{C}(1)$ , 其余数据点  $\mathbf{q}_i (i=1, 2, \dots, M-1)$  在最小二乘意义上被逼近, 即目标函数

$$f = \sum_{i=1}^{M-1} [\mathbf{q}_i - \mathbf{C}(\bar{\xi}_i)]^2 \quad (2)$$

是关于  $n-1$  个控制顶点  $\mathbf{Q}_j (j=1, 2, \dots, n-1)$  的最小值. 通过节点配置技术<sup>[36]</sup> 确定节点矢量  $\xi = [\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n+p+1}]$ , 公式为

$$\begin{cases} \xi_0 = \xi_1 = \dots = \xi_p = 0 \\ \xi_{p+j} = (1-\beta)\bar{\xi}_{i-1} + \beta\bar{\xi}_i, \quad j = 1, 2, \dots, n-p. \\ \xi_{n+1} = \xi_{n+2} = \dots = \xi_{n+p+1} = 1 \end{cases}$$

其中,  $\begin{cases} i = \text{int}(jc) \\ c = (M+1)/(n-p+1). \end{cases}$  根据  $\xi$  和给出的  $\begin{cases} \beta = jc - i \end{cases}$

$\omega_i (i=0, 1, \dots, n)$ , 可知  $R_{i,p}(\xi)$ , 将  $\mathbf{q}_i$ ,  $\bar{\xi}_i$  和  $R_{i,p}(\xi)$

代入式(2)中, 求出目标函数  $f$  最小值时对应的控制顶点  $Q_i (i=0, 1, \dots, n)$ . 由目标函数最小化生成的控制顶点与节点矢量构造一条拟合曲线, 并定义最大相对拟合误差  $E_f$  为

$$E_f = \max_{0 \leq i \leq M} \left( \min_{0 \leq \xi \leq 1} \left| \frac{q_i - C(\xi)}{\max(x_{\max} - x_{\min}, y_{\max} - y_{\min})} \right| \right).$$

如果  $E_f$  在规定的曲线误差限内, 即为所求解; 否则, 控制顶点数增加 1, 重新拟合, 直至生成的拟合曲线在规定的曲线误差限内.

本文选用 3 次 NURBS 曲线对渐开线和齿根过渡曲线进行拟合. 以  $m=2$ ,  $z=19$  和  $\alpha=20^\circ$  的齿轮为例, 对于渐开线  $BC$  和齿根过渡曲线  $CD$ , 分别选取 51 个数据点  $q_i (i=0, 1, \dots, 50)$ , 控制顶点个数从 4 个逐渐增加到 15 个, 绘制的收敛曲线图如图 6 所示.

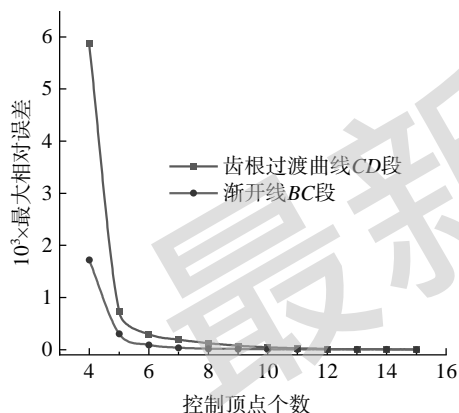


图 6 拟合曲线收敛曲线

从图 6 可以看出, 拟合误差收敛速度较快且收敛曲线较为光滑, 给定误差限  $\delta=0.001$ , 当控制顶点个数大于等于 5 时, 拟合的两段曲线的最大相对误差均小于  $\delta$ , 达到拟合精度要求. 因此, 本文选取 5 个控制顶点对渐开线和齿根过渡曲线进行拟合, 结果如图 7 所示.

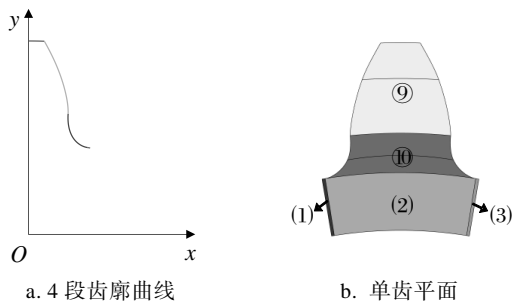


图 7 渐开线和齿根过渡曲线拟合曲线

### 2.3 渐开线圆柱齿轮平面与实体建模

(1) 由渐开线圆柱齿轮的特点和单齿轮廓曲线的对称性, 首先构建单齿右半部分平面齿廓曲

线, 其中, 齿顶圆圆弧和齿根圆圆弧采用 2 次 NURBS 曲线精确表达, 渐开线和齿根过渡曲线采用 3 次 NURBS 曲线拟合, 建模结果如图 8a 所示.

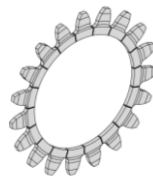


a. 4 段齿廓曲线

b. 单齿平面



c. 单齿实体



d. 齿轮实体

图 8 渐开线圆柱齿轮实体建模过程

(2) 采用 NURBS 曲面建模技术建立单齿平面.

根据边界曲线和单齿几何特点将单齿区域分成 5 片, 其中, ③, ④和⑤片上下边界均为圆弧段, 左右边界均为直线段, 其控制顶点易求, 本文不进行详细介绍. ①和②片右边界曲线分别为拟合的渐开线曲线和拟合的齿根过渡曲线, 左边界曲线与右边界曲线关于  $y$  轴对称, 上下边界曲线均为圆弧段. 下面以①片为例, 详细介绍该面片控制顶点的求解过程. 根据对称性, 易求出左边界曲线的控制顶点坐标, 只需给出中间列控制顶点坐标和权因子, 即可实现 NURBS 曲面建模. 设中间列(用下标 2 表示)第  $j$  个控制顶点坐标为  $(x_{2,j}, y_{2,j})$ , 权因子为  $\omega_{2,j} (j=0, 1, \dots, n_\xi)$ , 易知  $x_{2,j}=0$ , 令

$$\begin{cases} y_{2,j} = (y_{2,n_\xi} - y_{2,0}) \cdot \frac{(y_{1,j} - y_{1,0})}{(y_{1,n_\xi} - y_{1,0})} \\ \omega_{2,j} = \frac{y_{2,j}}{\sqrt{x_{1,j}^2 + y_{1,j}^2}} \end{cases}$$

其中,  $(x_{1,j}, y_{1,j})$  表示第 1 列, 即右边界曲线控制顶点所在列第  $j$  个控制顶点坐标. 对 5 张面片分别进行 NURBS 曲面建模, 结果如图 8b 所示.

(3) 采用 NURBS 技术建立单齿实体模型. 三维单齿实体模型可以看作由二维曲面模型在  $z$  方向偏置得到, 因此可将建立曲面模型的控制顶点坐标沿  $z$  轴平移一个齿宽  $B$ , 则平移后和平移前的控制顶点就组成实体建模所需的控制顶点, 再

给出该方向的节点矢量, 即可采用 NURBS 技术实现单齿实体建模, 结果如图 8c 所示.

(4) 将单齿实体模型绕齿轮圆心进行旋转, 即可得到渐开线圆柱齿轮实体模型, 结果如图 8d 所示.

### 3 无摩擦接触 IGA

图 9 所示为 2 个二维弹性变形体接触示意图, 其中, 上标 s 和 m 分别标记从接触体和主接触体,  $\Omega_t$  表示接触体在  $t$  时刻的当前构型, 相应的边界表示为  $\Gamma_t = \partial\Omega_t$ . 类似地,  $\Omega_0$  表示接触体在  $t=0$  时刻的参考构型, 此时未发生接触变形, 相应的边界用  $\Gamma_0$  表示; 由于后续计算是在初始构型上进行积分计算, 为了书写方便, 将下标 0 省略.  $\Gamma_u$  和  $\Gamma_p$  分别表示一般边界值问题中的位移边界和外力边界. 在接触问题中, 还包含发生接触作用的接触边界,  $\Gamma_c$  即表示主从接触体在  $t$  时刻的接触界面, 并有  $\Gamma_{tc} = \Gamma_{tc}^s = \Gamma_{tc}^m$ ,  $\Gamma_{tc} = \Gamma_t^s \cap \Gamma_t^m$ , 将其映射到参考构型上并记为  $\Gamma_C$ .

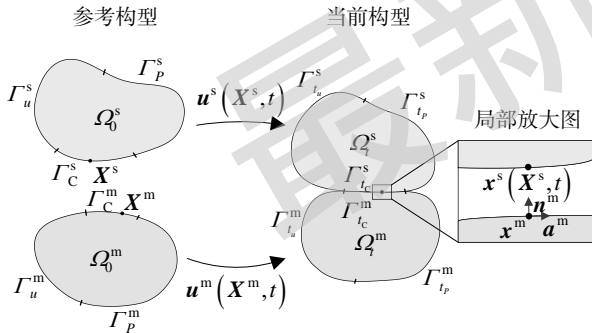


图 9 二维接触示意图

假设  $\mathbf{X}$  表示变形体在参考构型上某一点的坐标,  $\mathbf{x}$  表示该点在当前构型上的坐标,  $\mathbf{u}$  表示该点在时间  $t$  内发生的位移, 则可以建立如下关系式

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t).$$

定义接触点之间的法向距离为法向接触间隙, 用  $g_N$  表示, 则有

$$g_N = (\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^m) \cdot \mathbf{n}^m, \mathbf{n}^m = \mathbf{n}(\mathbf{x}^m) \quad (3)$$

其中,  $\mathbf{x}^s$  表示从接触体上的点, 并有  $\mathbf{x}^s \in \Gamma_{tc}^s$ ;  $\mathbf{x}^m$  表示  $\mathbf{x}^s$  在主接触体上的最近投影点;  $\mathbf{n}^m$  表示投影点  $\mathbf{x}^m$  处的单位外法矢, 该点处的切矢可表示为  $\mathbf{a}^m$ , 并有  $\mathbf{a}^m = \mathbf{x}_{,\beta}^m$ . 在后续推导中, 若  $\beta$  只取值 1, 表示接触界面为一维线接触, 并有  $\mathbf{x}_{,1}^m = \partial\mathbf{x}/\partial\xi$ ; 若  $\beta$  取值 1 和 2, 表示接触界面为二

维面接触, 并有  $\mathbf{x}_{,1}^m = \partial\mathbf{x}/\partial\xi$ ,  $\mathbf{x}_{,2}^m = \partial\mathbf{x}/\partial\eta$ ,  $\mathbf{x}_{,12}^m = \mathbf{x}_{,21}^m = \partial^2\mathbf{x}/(\partial\xi\partial\eta)$ .

当发生接触相互作用时, 投影点处会产生接触力  $\mathbf{t}_c$ , 该接触力可分解为法线方向上的法向接触力  $t_N$  和切线方向上的切向接触力  $t_T$ , 即

$$\mathbf{t}_c^m = t_N^m \mathbf{n}^m + t_T^m \mathbf{a}^m, \mathbf{t}_c^s = -\mathbf{t}_c^m.$$

本文考虑无摩擦接触问题, 即  $t_T = 0$ .

当接触作用发生时, 需要满足法向接触约束条件, 包含运动学条件和动力学条件 2 方面. 其中, 运动学条件指 2 个接触体不能发生相互穿透, 即发生接触作用处的法向接触间隙不可以小于 0; 动力学条件指发生接触时的法向接触力只能为压力. 因此, 法向接触约束条件可用如下的数学表达式描述为

$$g_N \geq 0, t_N \leq 0 \quad (4)$$

对式(4)进行讨论后发现, 需要排除  $g_N > 0$ ,  $t_N < 0$  的情况, 即法向接触间隙大于 0 时, 虽然未发生接触相互作用, 但是产生了法向接触压力, 与事实不符.

因此, 法向接触约束条件的完整表达为

$$g_N \geq 0, t_N \leq 0, g_N t_N = 0.$$

针对无摩擦接触问题, 将法向接触约束条件引入一般边界值问题, 得到应满足的微分方程和边界条件, 可表示为

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j}^l = b_i^l, \mathbf{X} \in \Omega^l \\ u_i^l = \bar{u}_i, \mathbf{X} \in \Gamma_u^l, l = s, m \\ \sigma_{ij}^l n_j^l = P_i^l, \mathbf{X} \in \Gamma_p^l \\ g_N \geq 0, t_N \leq 0, g_N t_N = 0 \end{cases}$$

其中,  $\sigma_{ij,j}^l$  表示物理量  $\sigma_{ij}^l$  对  $j$  方向求偏导数;  $b_i^l$  表示体积力;  $\bar{u}_i$  和  $P_i^l$  分别表示在边界  $\Gamma_u$  和  $\Gamma_p$  上给定的初始位移边界条件和外力边界条件;  $n_j$  表示边界一点上外法线的方向余弦.

本文使用罚函数法在整体平衡方程中施加法向不等式接触约束条件. 罚函数法的本质是通过引入罚因子, 用罚因子与接触界面侵入量的乘积表示接触力, 侵入量越大, 接触力越大, 接触体的侵入越困难. 该方法具有不会增加额外的自由度, 且能使得平衡方程刚度矩阵保持正定, 便于计算和程序存储的优点, 但对接触界面间的不可穿透条件只能实现近似满足, 且罚因子的取值会影响接触力的计算精度. 从理论上说, 罚因子趋于无穷大时, 可以精确地满足法向接触约束条件, 但会造

成刚度矩阵病态,在实际计算中,通常根据经验选取合适的罚因子.

采用罚函数法施加接触约束条件后,接触系统的总势能可表达为

$$\Pi_{\text{con}}(\mathbf{u}) = \Pi_{\text{int}}(\mathbf{u}) + \Pi_{\text{ext}}(\mathbf{u}) + \Pi_c(\mathbf{u}) \quad (5)$$

其中,  $\Pi_{\text{int}}(\mathbf{u})$  表示接触系统的弹性势能;  $\Pi_{\text{ext}}(\mathbf{u})$  表示外力做的功;  $\Pi_c(\mathbf{u})$  表示惩罚势能项,公式为

$$\Pi_c(\mathbf{u}) = \int_{\Gamma_c^s} \frac{1}{2} \lambda (g_N)^2 d\Gamma.$$

$\lambda$  表示罚因子. 根据最小势能原理,对式(4)求变分,可得

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{\text{con}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) &= \\ \delta \Pi_{\text{int}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + \delta \Pi_{\text{ext}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + \delta \Pi_c(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) &= 0. \end{aligned}$$

其中,

$$\delta \Pi_c(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Gamma_c^s} \lambda g_N \delta g_N d\Gamma.$$

发生接触时,将  $\lambda$  与  $g_N$  的乘积作为法向接触力,即  $t_N = \lambda g_N$ . 对  $\delta \Pi_c(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})$  进行线性化表达,可得

$$\begin{aligned} L[\delta \Pi_c(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})] &= \\ \int_{\Gamma_c^s} \lambda (\delta g_N \Delta g_N + g_N \Delta \delta g_N) d\Gamma & \quad (6) \end{aligned}$$

式(6)中的变量包含  $g_N$ ,  $g_N$  的变分  $\delta g_N$ ,  $g_N$  的增量  $\Delta g_N$  以及  $\delta g_N$  的增量  $\Delta \delta g_N$ .

对于二维情形,  $\delta g_N$  的计算公式为

$$\delta g_N = \left[ \delta \mathbf{x}^s - \left( \delta \mathbf{x}^m \Big|_{\xi=\bar{\xi}} + \mathbf{x}_{,1}^m \delta \xi \right) \right] \cdot \mathbf{n} + (\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^m) \cdot \delta \mathbf{n} \quad (7)$$

其中,  $\delta \mathbf{x}^m \Big|_{\xi=\bar{\xi}}$  表示在链式法则中参数  $\xi$  确定时变量  $\mathbf{x}^m$  的显式变分,为方便书写,下文中简写为  $\delta \mathbf{x}^m$ . 根据  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ , 可得  $\delta \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0$ , 又因为  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0$ , 故式(7)中等号右边的最后2项均为0,可简写为

$$\delta g_N = (\delta \mathbf{x}^s - \delta \mathbf{x}^m) \cdot \mathbf{n}.$$

同理可得,  $\Delta g_N$  的表达式为

$$\Delta g_N = (\Delta \mathbf{x}^s - \Delta \mathbf{x}^m) \cdot \mathbf{n}.$$

根据  $g_N = (\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^m) \cdot \mathbf{n}$ , 可得  $\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^m = g_N \mathbf{n}$ , 对其进行变分计算,可得

$$\delta \mathbf{x}^s - \delta \mathbf{x}^m - \mathbf{x}_{,1}^m \delta \xi = \delta g_N \mathbf{n} + g_N \delta \mathbf{n} \quad (8)$$

对式(8)进行线性化操作,可得

$$\begin{aligned} -\delta \mathbf{x}_{,1}^m \Delta \xi - \Delta \mathbf{x}_{,1}^m \delta \xi - \mathbf{x}_{,11}^m \Delta \xi \delta \xi - \mathbf{x}_{,1}^m \Delta \delta \xi &= \\ \Delta \delta g_N \mathbf{n} + \delta g_N \Delta \mathbf{n} + \Delta g_N \delta \mathbf{n} + g_N \Delta \delta \mathbf{n}. & \end{aligned}$$

根据  $\delta \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0$ , 对其进行线性化操作,可得

$\Delta \delta \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} + \delta \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{n} = 0$ . 对式(8)等号两边同时乘以  $\mathbf{n}$ , 并进行整理,可得到  $\Delta \delta g_N$  的表达式为

$$\begin{aligned} \Delta \delta g_N &= -\delta \mathbf{x}_{,1}^m \cdot \mathbf{n} \Delta \xi - \Delta \mathbf{x}_{,1}^m \cdot \mathbf{n} \delta \xi - \\ & \left( \mathbf{x}_{,11}^m \cdot \mathbf{n} \right) \Delta \xi \delta \xi + g_N \delta \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{n} \end{aligned} \quad (9)$$

根据  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0$ , 对其进行变分计算可得

$$\mathbf{x}_{,1}^m \cdot \delta \mathbf{n} = -\left( \delta \mathbf{x}_{,1}^m + \mathbf{x}_{,11}^m \delta \xi \right) \cdot \mathbf{n} \quad (10)$$

同理可得

$$\mathbf{x}_{,1}^m \cdot \Delta \mathbf{n} = -\left( \Delta \mathbf{x}_{,1}^m + \mathbf{x}_{,11}^m \Delta \xi \right) \cdot \mathbf{n}.$$

因此,式(9)中最后一项  $g_N \delta \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{n}$  的计算表达式为

$$\begin{aligned} g_N \delta \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{n} &= \\ \frac{g_N}{\mathbf{x}_{,1}^m \cdot \mathbf{x}_{,1}^m} \times \left[ \left( \delta \mathbf{x}_{,1}^m + \mathbf{x}_{,11}^m \delta \xi \right) \cdot \mathbf{n} \right] \left[ \left( \Delta \mathbf{x}_{,1}^m + \mathbf{x}_{,11}^m \Delta \xi \right) \cdot \mathbf{n} \right] & \quad (11) \end{aligned}$$

对式(8)两边同时乘以  $\mathbf{x}_{,1}^m$ , 并代入式(10), 整理后可得到  $\delta \xi$  的计算表达式为

$$\begin{aligned} \delta \xi &= \frac{1}{\mathbf{x}_{,1}^m \cdot \mathbf{x}_{,1}^m - g_N \mathbf{x}_{,11}^m \cdot \mathbf{n}} \times \\ & \left[ \left( \delta \mathbf{x}^s - \delta \mathbf{x}^m \right) \cdot \mathbf{x}_{,1}^m + g_N \delta \mathbf{x}_{,1}^m \cdot \mathbf{n} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

同理可得,  $\Delta \xi$  的计算表达式为

$$\begin{aligned} \Delta \xi &= \frac{1}{\mathbf{x}_{,1}^m \cdot \mathbf{x}_{,1}^m - g_N \mathbf{x}_{,11}^m \cdot \mathbf{n}} \times \\ & \left[ \left( \Delta \mathbf{x}^s - \Delta \mathbf{x}^m \right) \cdot \mathbf{x}_{,1}^m + g_N \Delta \mathbf{x}_{,1}^m \cdot \mathbf{n} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

将式(11)~式(13)代入式(9), 即可计算出  $\Delta \delta g_N$ .

对于三维情形,需要对2个参数方向进行导数计算,为了便于书写,采用爱因斯坦标记法简化公式表达. 令  $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$ ,  $\xi^1$  和  $\xi^2$  分别表示2个参数方向. 对公式  $\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^m = g_N \mathbf{n}$  进行变分计算,可得

$$\delta \mathbf{x}^s - \delta \mathbf{x}^m - \mathbf{x}_{,\alpha}^m \delta \xi^\alpha = \delta g_N \mathbf{n} + g_N \delta \mathbf{n} \quad (14)$$

$\Delta \delta g_N$  的表达式为

$$\begin{aligned} \Delta \delta g_N &= -\delta \mathbf{x}_{,\alpha}^m \cdot \mathbf{n} \Delta \xi^\alpha - \Delta \mathbf{x}_{,\alpha}^m \cdot \mathbf{n} \delta \xi^\alpha - \\ & \mathbf{x}_{,\alpha\beta}^m \cdot \mathbf{n} \Delta \xi^\beta \delta \xi^\alpha + g_N \delta \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{n} \end{aligned} \quad (15)$$

先对  $\mathbf{x}_{,\alpha}^m \cdot \mathbf{n} = 0$  进行变分计算,可得

$$\mathbf{x}_{,\alpha}^m \cdot \delta \mathbf{n} = -\left( \delta \mathbf{x}_{,\alpha}^m + \mathbf{x}_{,\alpha\beta}^m \delta \xi^\beta \right) \cdot \mathbf{n} \quad (16)$$

将式(16)中的  $\delta$  替换成  $\Delta$ , 可得式(15)中最后一项  $g_N \delta \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{n}$  的计算表达式为

$$\begin{aligned} g_N \delta \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{n} &= \\ \frac{g_N}{\mathbf{x}_{,1}^m \cdot \mathbf{x}_{,1}^m} \left[ \left( \delta \mathbf{x}_{,1}^m + \mathbf{x}_{,1\beta}^m \delta \xi^\beta \right) \cdot \mathbf{n} \right] \left[ \left( \Delta \mathbf{x}_{,1}^m + \mathbf{x}_{,1\beta}^m \Delta \xi^\beta \right) \cdot \mathbf{n} \right]. & \end{aligned}$$

再对式(14)两边同时乘以  $\mathbf{x}_{,\alpha}^m$ , 并代入式(16), 整理后, 有

$$\mathbf{x}_{,\alpha}^m \cdot \mathbf{x}_{,\beta}^m \delta \xi^\beta - g_N \mathbf{x}_{,\alpha\beta}^m \cdot \mathbf{n} \delta \xi^\beta = (\delta \mathbf{x}^s - \delta \mathbf{x}^m) \cdot \mathbf{x}_{,\alpha}^m + g_N \delta \mathbf{x}_{,\alpha}^m \cdot \mathbf{n}.$$

进而可求出  $\delta \xi^1$  和  $\delta \xi^2$ ,  $\Delta \xi^1$  和  $\Delta \xi^2$  的求解过程与  $\delta \xi^1$  和  $\delta \xi^2$  的求解过程相同. 最后, 将  $g_N \delta \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{n}$ ,  $\delta \xi^1$ ,  $\delta \xi^2$ ,  $\Delta \xi^1$  和  $\Delta \xi^2$  代入式(15), 即可计算出  $\Delta \delta g_N$ .

下面通过接触搜索, 确定进行接触计算的具体接触位置. 接触搜索一般分为全局搜索和局部搜索2步, 先通过全局搜索判断出可能会发生接触的部分, 再通过局部搜索判断出具体的接触位置, 其中, 局部搜索是难点. 本文采用最近投影点法判断具体接触位置.

对于二维接触问题, 设 NURBS 边界  $\Gamma_{tc}^m$  为曲线  $\mathbf{C}(\xi)$ ,  $\mathbf{x}^m$  对应的参数值为  $\bar{\xi}$ , 则有  $\mathbf{C}'(\bar{\xi}) \cdot (\mathbf{C}(\bar{\xi}) - \mathbf{x}^s) = 0$ , 构造函数  $f(\xi)$ , 即

$$f(\xi) = \mathbf{C}'(\xi) \cdot (\mathbf{C}(\xi) - \mathbf{x}^s).$$

采用牛顿迭代法求解方程  $f(\xi) = 0$ , 相应的迭代方程为

$$\xi_{i+1} = \xi_i - \frac{f(\xi_i)}{f'(\xi_i)}.$$

其中,

$$\begin{cases} f(\xi_i) = \mathbf{C}'(\xi_i) \cdot (\mathbf{C}(\xi_i) - \mathbf{x}^s) \\ f'(\xi_i) = \mathbf{C}''(\xi_i) \cdot (\mathbf{C}(\xi_i) - \mathbf{x}^s) + \mathbf{C}'(\xi_i) \cdot \mathbf{C}'(\xi_i) \end{cases}.$$

通过牛顿迭代计算出  $\xi$ , 即确定了点  $\mathbf{x}^s$  在曲线边界  $\Gamma_{tc}^m$  上的最近投影点  $\mathbf{x}^m$ .

对于三维接触问题, 设 NURBS 边界  $\Gamma_{tc}^m$  为曲面  $\mathbf{S}(\xi, \eta)$ ,  $\mathbf{x}^m$  对应的参数值为  $\bar{\xi}$  和  $\bar{\eta}$ , 则有

$$\begin{cases} \mathbf{S}_{,\xi}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \cdot (\mathbf{S}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) - \mathbf{x}^s) = 0 \\ \mathbf{S}_{,\eta}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \cdot (\mathbf{S}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) - \mathbf{x}^s) = 0 \end{cases}.$$

分别构造函数  $g$  和  $h$ , 即

$$\begin{cases} g = \mathbf{S}_{,\xi} \cdot (\mathbf{S} - \mathbf{x}^s) \\ h = \mathbf{S}_{,\eta} \cdot (\mathbf{S} - \mathbf{x}^s) \end{cases}.$$

其中,  $\mathbf{S}_{,\xi}$  和  $\mathbf{S}_{,\eta}$  分别表示  $\mathbf{S}$  对  $\xi$ ,  $\eta$  的偏导数. 采用牛顿迭代法求解方程组  $g = 0$ ,  $h = 0$ , 相应的迭代方程为

$$\begin{cases} \xi_{i+1} = \xi_i - \frac{g \cdot h_{,\eta} - h \cdot g_{,\eta}}{g_{,\xi} \cdot h_{,\eta} - h_{,\xi} \cdot g_{,\eta}} \\ \eta_{i+1} = \eta_i - \frac{h \cdot g_{,\xi} - g \cdot h_{,\xi}}{g_{,\xi} \cdot h_{,\eta} - h_{,\xi} \cdot g_{,\eta}} \end{cases}.$$

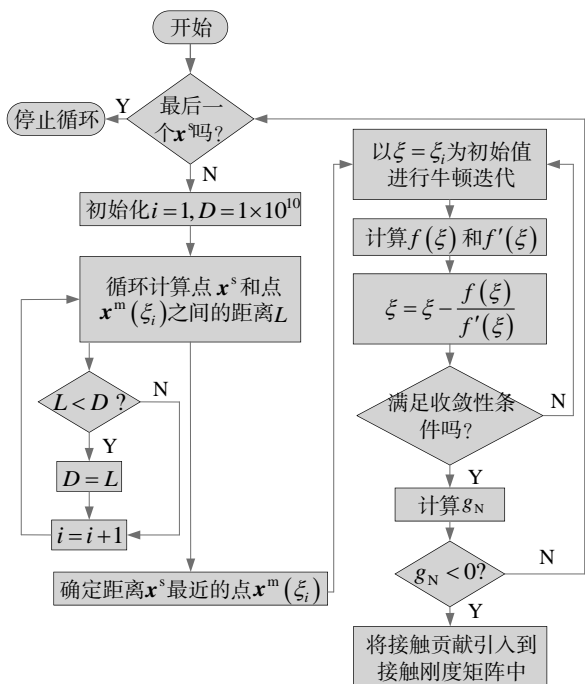
其中,  $g_{,\xi}$  和  $g_{,\eta}$  分别表示函数  $g$  对  $\xi$ ,  $\eta$  的偏导数;  $h_{,\xi}$  和  $h_{,\eta}$  分别表示函数  $h$  对  $\xi$ ,  $\eta$  的偏导数, 并有

$$\begin{cases} g_{,\xi} = \mathbf{S}_{,\xi\xi} \cdot (\mathbf{S} - \mathbf{x}^s) + \mathbf{S}_{,\xi} \cdot \mathbf{S}_{,\xi} \\ g_{,\eta} = \mathbf{S}_{,\xi\eta} \cdot (\mathbf{S} - \mathbf{x}^s) + \mathbf{S}_{,\xi} \cdot \mathbf{S}_{,\eta} \\ h_{,\xi} = \mathbf{S}_{,\eta\xi} \cdot (\mathbf{S} - \mathbf{x}^s) + \mathbf{S}_{,\eta} \cdot \mathbf{S}_{,\xi} \\ h_{,\eta} = \mathbf{S}_{,\eta\eta} \cdot (\mathbf{S} - \mathbf{x}^s) + \mathbf{S}_{,\eta} \cdot \mathbf{S}_{,\eta} \end{cases}.$$

通过牛顿迭代计算出  $\xi$  和  $\eta$ , 即确定了点  $\mathbf{x}^s$  在曲面边界  $\Gamma_{tc}^m$  上的最近投影点  $\mathbf{x}^m$ .

下面以二维接触问题为例, 阐述在实际计算过程中实现接触搜索的过程. 首先选取高斯积分点作为  $\Gamma_{tc}^s$  上的  $\mathbf{x}^s$ ; 然后将  $\Gamma_{tc}^m$  的参数区间  $[0,1]$  等分成  $n$  等份, 得到  $n+1$  个参数值  $\xi_i$  ( $i=1,2,\dots,n+1$ ) 以及对应的  $\mathbf{x}^m(\xi_i)$ , 计算  $\mathbf{x}^s$  与  $\mathbf{x}^m(\xi_i)$  之间的距离, 将最短距离对应的  $\mathbf{x}^m$  的参数值作为牛顿迭代的初始值, 再采用牛顿迭代法进行迭代计算, 当满足收敛性条件时可确定  $\mathbf{x}^m$ ; 最后根据式(3)计算  $g_N$ , 并判断是否发生接触. 在算法实现上, 本文涉及的齿轮建模、接触计算和可视化借助了开源工具 `nliga`<sup>[37-38]</sup> 的部分功能. 上述接触搜索的流程如图 10 所示.

图 10 二维接触搜索流程



### 4 数值算例

#### 4.1 静力学收敛性验证

(1) 二维单齿线弹性变形. 齿轮的基本参数为齿数  $z_1=19$ ,  $m=2$ ,  $\alpha=20^\circ$ , 单齿顶部受到向下均匀分布的载荷  $P_0$ , 底部完全固定. 弹性材料和边界条件参数为  $E=207 \text{ GPa}$ ,  $\mu=0.25$ ,  $P_0=[0,0,-10] \text{ N/mm}^2$ . 基于 IGA 和商业有限元软件 Abaqus 仿真后的位移和应力云图分别如图 11 和图 12 所示; IGA 和 FEA 的位移、应力最大值如表 1 所示. 其中, IGA 与 FEA 的单元总数分别为 549 和 19525, 结点总数分别为 844 和 39472.

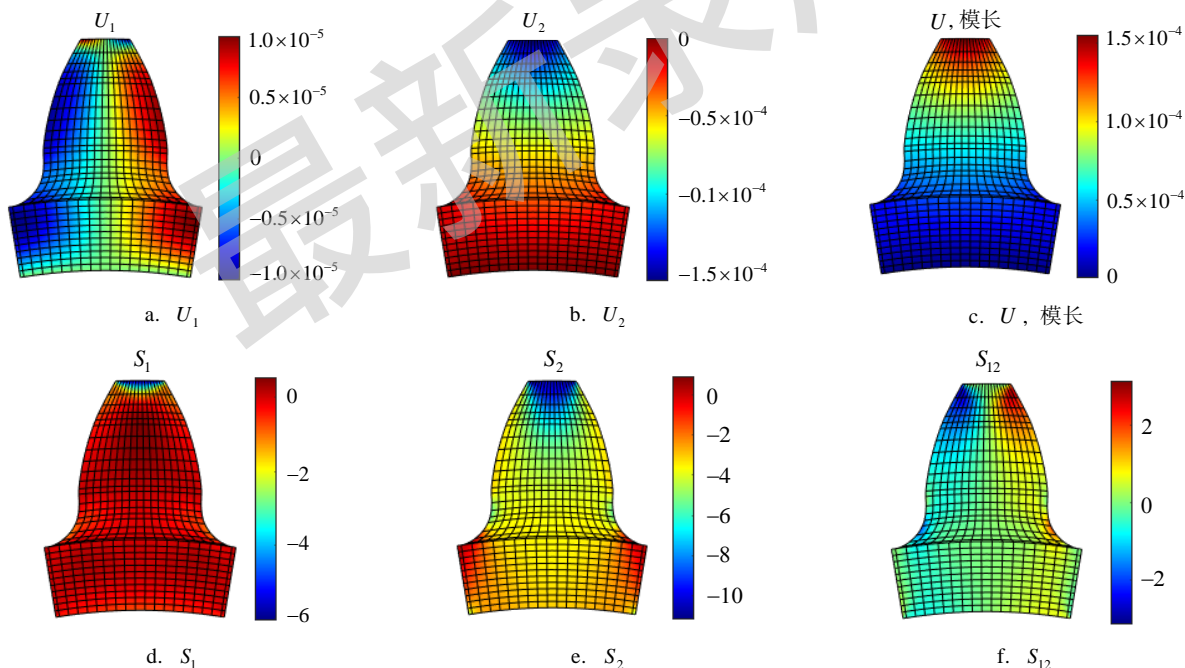
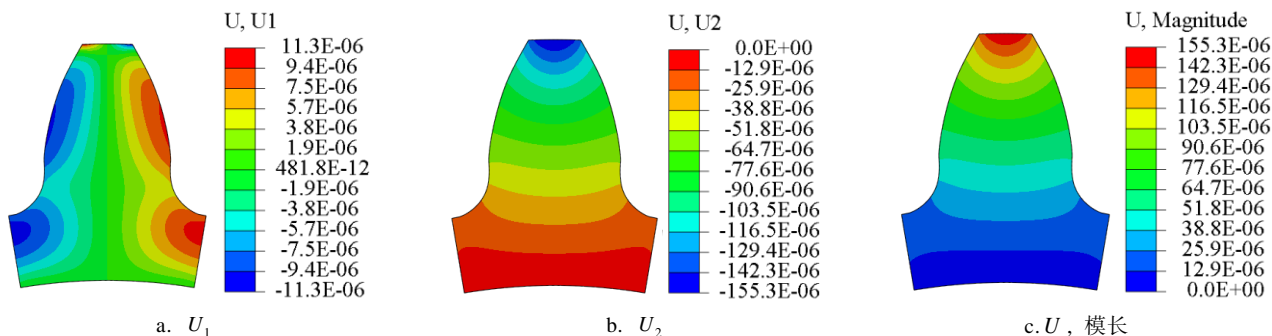


图 11 二维齿轮静力学 IGA 仿真结果



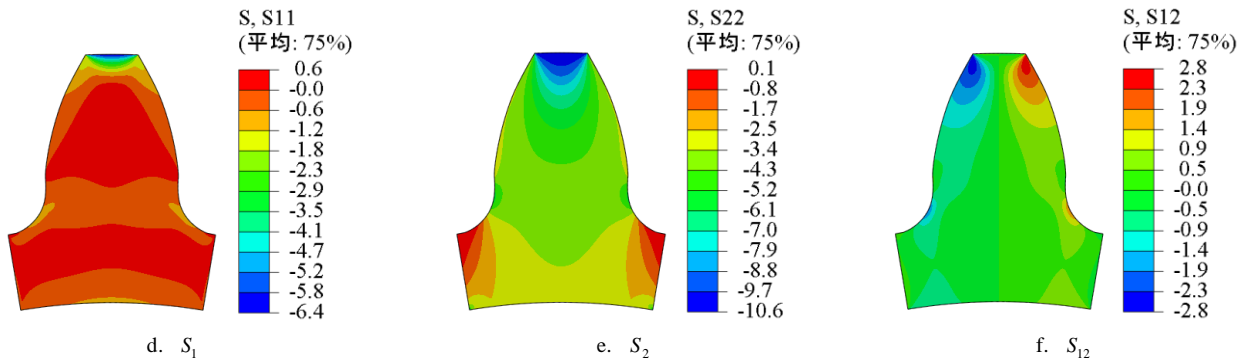


图 12 二维齿轮静力学 Abaqus 仿真结果

表 1 IGA 和 FEA 的位移和应力最大值

位移/应力	单位	IGA	FEA
$U_1^{\max}$	mm	$1.0138 \times 10^{-5}$	$1.1320 \times 10^{-5}$
$U_2^{\min}$	mm	$-1.5500 \times 10^{-4}$	$-1.5527 \times 10^{-4}$
$U^{\max}$	mm	$1.5500 \times 10^{-4}$	$1.5527 \times 10^{-4}$
$S_1^{\max}$	Mpa	0.5537	0.5636
$S_2^{\min}$	Mpa	-11.1710	-10.5517
$S_{12}^{\max}$	Mpa	3.1295	2.7768

从图 11, 图 12 可以看出, 等几何分析仿真结果的位移云图与有限元软件 Abaqus 仿真结果的位移云图基本一致, 验证了等几何分析的有效性。

通过加密网格, 绘制最大位移模长随自由度数收敛性曲线, 如图 13 所示。可以看出, 与 FEA 相比, IGA 更快且更光滑达到收敛解。

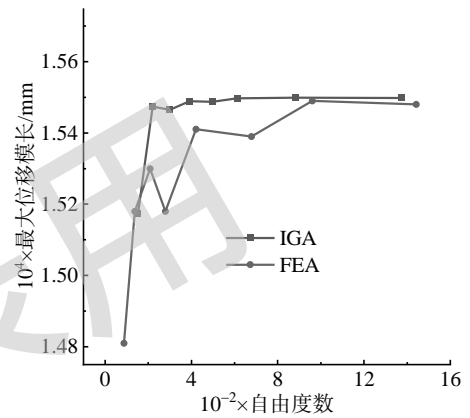


图 13 二维单齿静力学收敛曲线

(2) 三维齿轮线弹性变形。将二维单齿进行偏置可得到三维单齿模型,  $B$  即为偏置长度, 令  $B=1$ , 其他几何参数、材料参数和边界条件与二维一致。基于 IGA 和商业有限元软件 Abaqus 仿真后的位移和应力云图如表 2 所示, 其中, IGA 与 FEA 的单元总数分别为 2745 和 155168, 结点总数分别为 6752 和 221269。可以看出, 等几何分析仿真结果的位移云图与有限元软件 Abaqus 仿真结果的位移云图具有较高的一致性。

表 2 三维齿轮静力学仿真结果

IGA		FEA	
位移云图	应力云图	位移云图	应力云图

通过加密网格, 绘制最大位移模长随自由度数收敛性曲线, 如图 14 所示。可以看出, 与 FEA

相比, IGA 更快达到收敛解, 两者的收敛解偏差约 0.2%。

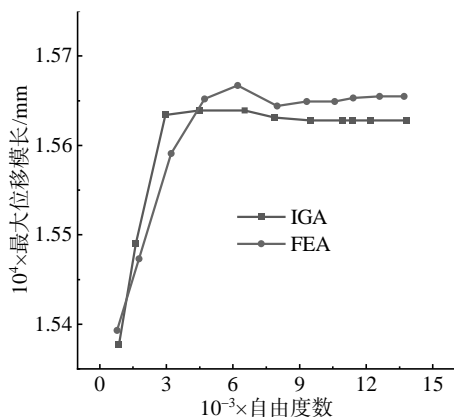


图 14 三维单齿静力学收敛曲线

### 4.2 齿轮接触 IGA

(1) 对二维渐开线圆柱齿轮进行接触仿真。齿轮的基本参数为主动轮齿数  $z_1=19$ ，从动轮齿数  $z_2=38$ ， $m=2$ ， $\alpha=20^\circ$ 。2 个齿轮均选用常用的低碳钢材料 20CrMnTi，其弹性模量  $E=207\text{ Gpa}$ ，泊松比  $\mu=0.25$ 。假设齿轮某时刻的啮合位置如图 15 所示，将主动轮(齿轮 1)顺时针旋转一个小弧度  $\theta=\pi/1600\text{ rad}$ 、从动轮(齿轮 2)固定作为边界条件，则其可发生接触相互作用并发生弹性变形，基于罚函数法的法向接触约束条件施加  $\lambda=1\times 10^7$ 。

基于 IGA 的仿真结果和基于有限元软件 Abaqus 的仿真结果如表 3 所示，其中，IGA 与 FEA

的单元总数分别为 816 和 40 652，结点总数分别 1328 和 82 160。可以看出，对于二维情况，等几何接触分析仿真结果的位移模长最大值与有限元软件 Abaqus 仿真结果的位移模长最大值完全一致，均为 0.0324mm，IGA 与 FEA 的最大应力值分别为 2 215.730 2 Mpa 和 2 212.867 9 Mpa，相对误差为 0.13%，如表 4 所示。数值算例结果表明，等几何分析仅使用较少的控制顶点实现较高的计算精度，体现了等几何分析在接触计算上的优势。

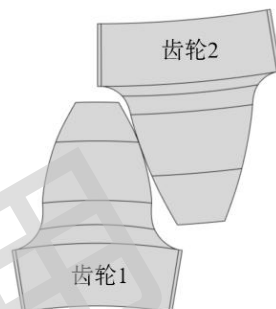


图 15 某时刻单齿啮合位置

表 3 二维渐开线圆柱齿轮单齿啮合仿真结果

IGA		FEA	
位移云图	应力云图	位移云图	应力云图
<p>U, 模长</p> <p>0.0324 0.0297 0.0270 0.0243 0.0216 0.0189 0.0162 0.0135 0.0108 0.0081 0.0054 0.0027 0</p>	<p>Mises</p> <p>2215.7302 2031.0860 1846.4418 1661.7976 1477.1534 1292.5093 1107.8651 923.2209 738.5767 553.9325 369.2884 184.6442 0</p>	<p>U, Magnitude</p> <p>0.0324 0.0297 0.0270 0.0243 0.0216 0.0189 0.0162 0.0135 0.0108 0.0081 0.0054 0.0027 0.0000</p>	<p>S, Mises (平均: 75%)</p> <p>2212.8679 2028.4723 1844.0768 1659.6813 1475.2858 1290.8903 1106.4948 922.0992 737.7037 553.3082 368.9127 184.5172 0.1217</p>

表 4 二维单齿啮合 IGA 和 FEA 仿真结果对比

位移/ 应力	单位	IGA	FEA	相对误差/%
$U^{\max}$	mm	0.0324	0.0324	0
$S^{\max}$	Mpa	2215.7302	2212.8679	0.13

通过加密网格，绘制最大位移模长随自由度的收敛性曲线，如图 16 所示。可以看出，与 FEA 相比，IGA 的收敛速度较快且较为光滑。

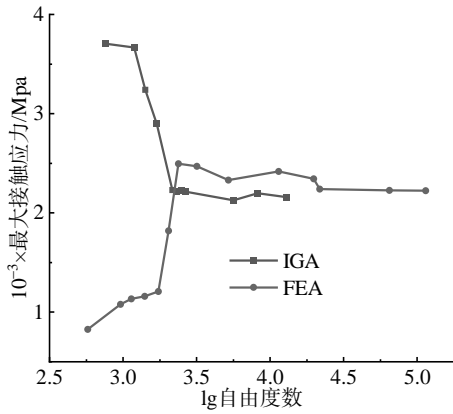


图 16 二维单齿接触最大接触应力收敛曲线

(2) 对三维渐开线圆柱齿轮实体进行接触仿

真。将二维平面模型进行偏置可得到三维实体模型， $B$ 即为偏置长度，令 $B=1$ ， $\lambda=1 \times 10^8$ ，其他几何参数、材料参数和边界条件与二维一致。基于IGA的仿真结果和基于有限元软件Abaqus的仿真结果如表5所示，其中，IGA与FEA的单元总数分别为2660和313028，结点总数分别7680和59308。可以看出，对于三维情况，等几何接触分析仿真结果的位移模长最大值与有限元软件Abaqus仿真结果的位移模长最大值完全一致，均为0.0324 mm，IGA与FEA的最大应力值分别为2200.2902 Mpa和1776.9370 Mpa，最大应力存在较大误差，如表6所示。

表 5 三维渐开线圆柱齿轮单齿啮合仿真结果

IGA		FEA	
位移云图	应力云图	位移云图	应力云图
<p>U, 模长</p> <p>0.0324 0.0297 0.0270 0.0243 0.0216 0.0189 0.0162 0.0135 0.0108 0.0081 0.0054 0.0027 0</p>	<p>Mises</p> <p>2200.2902 2016.9327 1835.5752 1650.2177 1466.8601 1283.5026 1100.1451 916.7876 733.4301 550.0726 366.7150 183.3575 0</p>	<p>U, Magnitude</p> <p>0.0324 0.0297 0.0270 0.0243 0.0216 0.0189 0.0162 0.0135 0.0108 0.0081 0.0054 0.0027 0.0000</p>	<p>S, Mises (平均: 75%)</p> <p>1776.9370 1629.0648 1481.1924 1333.3199 1185.4475 1037.5751 889.7026 741.8302 593.9578 446.0853 298.2129 150.3405 2.4681</p>

表 6 三维单齿啮合 IGA 和 FEA 仿真结果对比

位移/应力	单位	IGA	FEA	相对误差/%
$U^{\max}$	mm	0.0324	0.0324	0
$S^{\max}$	Mpa	2200.2902	1776.9370	23.82

与二维模型计算结果相比，IGA 最大应力从 2215.730 2 Mpa 降为 2200.290 2 Mpa，相对误差为 0.70%；FEA 最大应力从 2 212.867 9 Mpa 降为 1776.937 0 Mpa，相对误差为 19.70%。初步考虑是因为 IGA 与 FEA 在实体单元的应力恢复算法上存在差异，尝试将 Abaqus 软件中的应力平均值从 75%降为 0%，最大应力为 2152.3069 Mpa，如图 17 所示。未来，将对 IGA 和 FEA 在三维接触应力可视化上的差异进行深入研究。

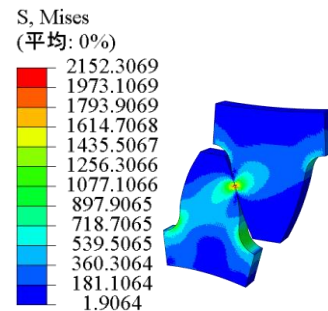


图 17 未进行应力平均的 FEA 应力云图

### 5 结 语

本文针对有限元在接触问题求解上的局限性和齿轮设计仿真过程的割裂现象，提出一种渐开线圆柱齿轮的 NURBS 参数化实体建模与等几何接触数值计算方法。首先构建参数驱动的渐开线圆柱齿轮实体模型，为后续分析提供高精度的几何模型；然后推导了基于点面法和自动接触搜索的线弹性等几何接触计算公式。通过数值算例，验证了本文方法的正确性。本文研究成果有助于提高齿轮传动接触的计算精度和效率，为齿轮设计分

析的一体化和智能化奠定基础。

本文工作仅考虑了无摩擦齿轮接触计算,而在齿轮实际接触过程中,往往伴随着摩擦现象;此外,由于齿轮在加工过程中存在加工精度问题,高精度的齿轮接触计算还需要考虑到制造误差的影响。未来的工作将聚焦在 3 个方面: (1) 研究齿轮传动的有摩擦接触等几何计算; (2) 探索考虑制造误差影响的高精度齿轮摩擦接触 IGA; (3) 将接触等几何计算应用于冲压成形等大变形弹塑性工程问题中。

## 参考文献(References):

- [1] Wang Peng, Yang Ce, Guo Zhuo, *et al.* Comparison of tooth bending strength of speed-increasing and speed-reducing involute spur gears[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2023, 59(5): 130-141(in Chinese)  
(王鹏, 杨策, 郭琢, 等. 渐开线直齿圆柱齿轮增速传动和减速传动齿根弯曲应力对比分析[J]. *机械工程学报*, 2023, 59(5): 130-141)
- [2] Li Shaoqi. Parametric modeling and contact analysis of involute cylindrical gear[D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2022(in Chinese)  
(李少奇. 渐开线圆柱齿轮的参数化建模与接触分析[D]. 成都: 西南交通大学, 2022)
- [3] Miao Jianwei. Research on visual measurement technology for tooth profile and radial circle runout of the involute cylindrical gear[D]. Changchun: Jilin University, 2021(in Chinese)  
(苗建伟. 渐开线圆柱齿轮齿廓与径向圆跳动的视觉测量技术研究[D]. 长春: 吉林大学, 2021)
- [4] Zhou Haohao. Contact analysis of metal and plastic helical gear transmission pair based on finite element[D]. Xiangtan: Xiangtan University, 2021(in Chinese)  
(周昊昊. 基于有限元的金属与塑料斜齿轮传动副的接触分析[D]. 湘潭: 湘潭大学, 2021)
- [5] Wang Shuo, Yuan Bing, Xu Wenbo, *et al.* Contact finite element analysis of two-stage gear transmission system and offset design of gear web[J/OL]. *Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering*, 1-9[2024-08-20]. <https://doi.org/10.13433/j.cnki.1003-8728.20230369>(in Chinese)  
(王硕, 袁冰, 徐文博, 等. 二级齿轮传动系统接触有限元分析及齿轮腹板偏置设计[J/OL]. *机械科学与技术*, 1-9[2024-08-20]. <https://doi.org/10.13433/j.cnki.1003-8728.20230369>)
- [6] Sun Yuetong, Tian Guofu, Fu Yanbo. Research on contact performance of spiral bevel gear based on finite element method[J]. *Journal of Machine Design*, 2023, 40(S2): 62-67(in Chinese)  
(孙悦桐, 田国富, 傅雁博. 基于有限元法的弧齿锥齿轮接触性能研究[J]. *机械设计*, 2023, 40(S2): 62-67)
- [7] Hughes T J R, Cottrell J A, Bazilevs Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, 194(39-41): 4135-4195
- [8] Cottrell J A, Hughes T J R, Bazilevs Y. *Isogeometric analysis: toward integration of CAD and FEA*[M]. Chichester: John Wiley & Sons, 2009
- [9] Lu J. Isogeometric contact analysis: geometric basis and formulation for frictionless contact[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200(5-8): 726-741
- [10] Temizer İ, Wriggers P, Hughes T J R. Contact treatment in isogeometric analysis with NURBS[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200(9-12): 1100-1112
- [11] de Lorenzis L, Temizer İ, Wriggers P, *et al.* A large deformation frictional contact formulation using NURBS-based isogeometric analysis[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011, 87(13): 1278-1300
- [12] Pi T, Zhang Y Q. Simulation of planar mechanisms with revolute clearance joints using the multipatch based isogeometric analysis[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, 343: 453-489
- [13] Pi T, Zhang Y Q. Modeling and simulation of revolute clearance joint with friction using the NURBS-based isogeometric analysis[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 95(1): 195-215
- [14] Bidkhorri E, Hassani B. A parametric knot adaptation approach to isogeometric analysis of contact problems[J]. *Engineering with Computers*, 2022, 38(1): 609-630
- [15] Wang Y, Yu Z Q, Lan P, *et al.* Local mesh refinement and coarsening based on analysis-suitable T-splines surface and its application in contact problem[J]. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2022, 17(10): Article No.101007
- [16] Khanyile N P, Alia A, Dufrenoy P, *et al.* Node-to-surface contact algorithm for the calculation of the acoustic response[J]. *Multibody System Dynamics*, 2024, 62(1): 1-29
- [17] Zhao G, Zhang R, Wang W, *et al.* Two-dimensional frictionless large deformation contact problems using isogeometric analysis and Nitsche's method[J]. *Journal of Computational Design and Engineering*, 2021, 9(1): 82-99
- [18] Zhang R, Zhao G, Wang W, *et al.* Large deformation frictional contact formulations for isogeometric Kirchhoff-Love shell[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2023, 249: Article No.108253
- [19] Chen Long, Hao Chanjuan, Wang Zhonghou, *et al.* Isogeometric analysis of gear with single tooth contact[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2021, 57(3): 107-115(in Chinese)  
(陈龙, 郝婵娟, 汪中厚, 等. 单齿啮合的齿轮接触等几何分析[J]. *机械工程学报*, 2021, 57(3): 107-115)
- [20] Chen L, Yu Y, Shang Y P, *et al.* Application of isogeometric analysis method in three-dimensional gear contact analysis[J]. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2023, 139(1): 817-846
- [21] Xue Yutong, Zhao Gang, Wang Aizeng, *et al.* Isogeometric analysis of bending strength of spur gear[J]. *Journal of Graphics*, 2022, 43(1): 79-84(in Chinese)  
(薛雨彤, 赵罡, 王爱增, 等. 直齿圆柱齿轮弯曲强度等几何分析[J]. *图学学报*, 2022, 43(1): 79-84)
- [22] Aigner M, Heinrich C, Jüttler B, *et al.* Swept volume parameterization for isogeometric analysis[C] //Proceedings of the 13th IMA International Conference on Mathematics of Surfaces XIII. Heidelberg: Springer, 2009: 19-44
- [23] Zhang Y J, Bazilevs Y, Goswami S, *et al.* Patient-specific vascular NURBS modeling for isogeometric analysis of blood flow[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009, 194(39-41): 4135-4195

- neering, 2007, 196(29-30): 2943-2959
- [24] Martin T, Cohen E, Kirby M. Volumetric parameterization and trivariate b-spline fitting using harmonic functions[C] //Proceedings of the ACM Symposium on Solid and Physical Modeling. New York: ACM Press, 2008: 269-280
- [25] Escobar J M, Cascón J M, Rodríguez E, *et al.* A new approach to solid modeling with trivariate T-splines based on mesh optimization[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200(45-46): 3210-3222
- [26] Zhang Y J, Wang W Y, Hughes T J R. Conformal solid T-spline construction from boundary T-spline representations[J]. *Computational Mechanics*, 2013, 51(6): 1051-1059
- [27] Xu G, Mourrain B, Duvigneau R, *et al.* Optimal analysis-aware parameterization of computational domain in 3D isogeometric analysis[J]. *Computer-Aided Design*, 2013, 45(4): 812-821
- [28] Xu G, Mourrain B, Duvigneau R, *et al.* Analysis-suitable volume parameterization of multi-block computational domain in isogeometric applications[J]. *Computer-Aided Design*, 2013, 45(2): 395-404
- [29] Pan M D, Chen F L. Low-rank parameterization of volumetric domains for isogeometric analysis[J]. *Computer-Aided Design*, 2019, 114: 82-90
- [30] Ji Y, Wang M Y, Pan M D, *et al.* Penalty function-based volumetric parameterization method for isogeometric analysis[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2022, 94: Article No.102081
- [31] Zhan Z, Wang W P, Chen F L. Simultaneous boundary and interior parameterization of planar domains via deep learning[J]. *Computer-Aided Design*, 2024, 166: Article No.103621
- [32] Qin K K, Li Y J, Deng C Y. Generalized Bézier volumes over simple convex polyhedra[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2024, 111: Article No.102338
- [33] Cui Jianwei, Chi Chengzhong. A exact method calculating the cross sectional area of involute gear[J]. *Journal of Taiyuan University of Technology*, 2003, 34(3): 316-317+321(in Chinese)  
(崔建伟, 池成忠. 一种渐开线齿轮横截面积的精确算法[J]. *太原理工大学学报*, 2003, 34(3): 316-317+321)
- [34] de Boor C. On calculating with B-splines[J]. *Journal of Approximation Theory*, 1972, 6(1): 50-62
- [35] Cox M G. The numerical evaluation of B-splines[J]. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 1972, 10(2): 134-149
- [36] Piegl L, Tiller W. *The NURBS book*[M]. Berlin: Springer, 1997
- [37] Du X X, Zhao G, Wang W, *et al.* NLIGA: a MATLAB framework for nonlinear isogeometric analysis[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2020, 80: Article No.101869
- [38] Du X X, Zhao G, Zhang R, *et al.* Numerical implementation for isogeometric analysis of thin-walled structures based on a Bézier extraction framework: nligaStruct[J]. *Thin-Walled Structures*, 2022, 180: Article No.109844