

三周期极小曲面结构设计及应用综述

闫鑫, 田李昊, 彭昊, 吕琳*

(山东大学计算机科学与技术学院 青岛 266237)
(llu@sdu.edu.cn)

摘要: 三周期极小曲面是一种隐函数表示的代数曲面, 具有许多优良的性质. 增材制造技术的快速发展极大地增强了复杂几何与拓扑结构的制造能力, 三周期极小曲面作为几何建模工具越来越受到关注. 首先, 从数学表达、性质、应用以及几何设计方法等方面对三周期极小曲面的研究现状进行介绍; 其次, 对三周期极小曲面在力学、传热传质、组织工程和声学等方面的性能及相关应用进行总结, 从几何建模方法的角度对三周期极小曲面进行分类梳理, 将现有工作分为规则单元法、参数单元法、区域拼接法以及整体优化法 4 类, 对各方法特点进行分析; 最后, 结合实际应用对该领域面临的挑战进行总结, 并展望未来工作与发展趋势.

关键词: 三周期极小曲面; 几何建模; 仿生结构; 隐式曲面; 增材制造
中图分类号: TP391.41 **DOI:** 10.3724/SP.J.1089.2023.19359

Design and Applications of Triply Periodic Minimal Surfaces: A Survey

Yan Xin, Tian Lihao, Peng Hao, and Lyu Lin*

(School of Computer Science and Technology, Shandong University, Qingdao 266237)

Abstract: Triply Periodic Minimal Surface is a kind of algebraic surface expressed by implicit function. The rapid development of additive manufacturing technology has greatly enhanced the manufacturing capabilities of complex geometries and topological structures, Triply Periodic Minimal Surface, as a powerful geometric modeling tool, has received more and more attention. Firstly, this paper introduces the current research status of Triply Periodic Minimal Surface in terms of mathematical expression, properties, applications, and geometric design methods. Secondly, the mechanical property, heat and mass transfer, tissue engineering and acoustics performance are summarized. The existing works related to Triply Periodic Minimal Surface are classified and combed from the perspective of geometric modeling methods. They are grouped into four categories: regular unit method, parametric unit method, region splicing method and overall optimization method. The characteristics of each method are analyzed. Finally, in accordance with practical applications, we summarized challenges and prospected future works in this field.

Key words: triply periodic minimal surfaces; geometric modeling; bionic structure; implicit surface; additive manufacturing

仿生学是指通过分析自然界中各种生物体在结构和功能等方面的特性并加以借鉴, 从而为设

计和制造新的产品、设备等提供新思路和方法的新兴交叉学科. 仿生结构^[1]已被广泛应用于新材料研

收稿日期: 2021-09-14; 修回日期: 2021-10-31. 基金项目: 国家自然科学基金(61972232). 闫鑫(1991—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为计算机图形学; 田李昊(1996—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为计算机图形学; 彭昊(1994—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为计算机图形学; 吕琳(1981—), 女, 博士, 教授, 博士生导师, CCF 高级会员, 论文通信作者, 主要研究方向为计算机图形学、计算几何、数字制造等.

发、航空航天和海洋装备、电子电路设计等诸多领域,并产生了许多推动人类技术进步的成果.例如,雷达借鉴了蝙蝠超声定位的原理,根据苍蝇复眼设计的航空相机,以及模仿蜂巢结构设计的轻量化结构等.

三周期极小曲面(triply periodic minimal surfaces, TPMS)是存在于自然界中的一类结构,在海胆^[2]、生物膜^[3]、蝴蝶翅鳞^[4]和甲虫的外骨骼^[5]

等生物体中均发现了三周期极小曲面的存在.

TPMS 是一类特殊的曲面,在 3 个方向上均具有周期性且无自交的结构^[6]. TPMS 结构具有许多优良的性质,如光滑性、实体空腔双连通性质,并具有高比表面积以及良好的力学性能等,吸引了包括机械、材料、物理、化学和医学等各领域研究人员的兴趣.图 1 展示了部分日常生活和生产中使用 TPMS 结构的场景.

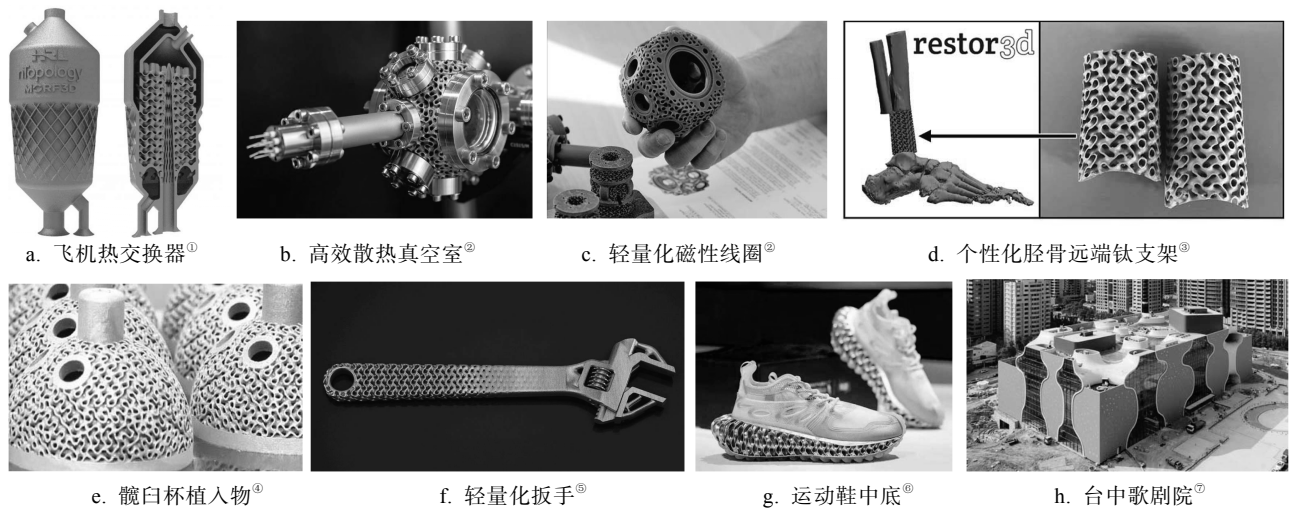


图 1 TPMS 结构的应用场景

受限于制造技术,早期对 TPMS 的研究主要集中于结构对称性和类型间转化等性质^[7-8]. 增材制造技术的出现以及快速发展,为复杂几何与拓扑结构的制造提供了支撑^[9],对 TPMS 的研究也开始进入了一个新的阶段.目前,对 TPMS 相关的研究和应用涵盖了从大尺度结构(如建筑设计)到中尺度的机械零部件,再到微尺度结构(如化学半透膜结构等).同时,上述领域的发展也对于基于 TPMS 的几何建模与优化方法提出了更多新的要求.

本文从 TPMS 的定义、数学表达、性质以及应用方面,对现有的关于 TPMS 结构、性质、应用及几何建模方法等相关工作进行了总结.其中,着重从几何建模方法与应用 2 个维度对现有工作进行分析,最后总结了现有方法的特点以及不足,并

对各类应用需求下 TPMS 几何建模方法需要解决的问题以及未来工作进行展望.

1 TPMS 简介

1.1 TPMS 的定义

极小曲面是指平均曲率处处为 0 的曲面,即满足 $H = (k_1 + k_2)/2 = 0$, 其中 k_1, k_2 是主曲率^[10]. 当极小曲面在相互独立的 3 个方向上呈现周期性排列时,对应的曲面称为三周期极小曲面. 5 种 TPMS 曲面根据最早发现者 Schwarz 和其学生 Neovius 分别被命名为 Schwarz primitive(P), Schwarz diamond(D), Schwarz hexagonal(H), Schwarz crossed layers of parallels(CLP)和 Neovius (N)^[11].

① <https://www.ansys.com/zh-cn/blog/heat-exchangerdesigns-gyroids>

② <https://www.additivemanufacturing.media/articles/can-3d-printed-metal-hold-a-vacuumfor-quantum-physics-research>

③ https://www.odtmag.com/issues/2019-04-01/view_features/does-3d-printing-add-value-in-orthopedics/

④ <https://www.metal-am.com/croom-precision-medical-turns-to-renishaw-for-am-and-metrology/>

⑤ <https://www.engineering.com/story/truesolid-gets-generative-design-upgrade>

⑥ <https://facfox.com/news/3d-printing-shoes-who-are-in-the-game.3dm>

⑦ <https://www.npac-ntt.org/index>

TPMS 的数学表达: 有许多方法可以描述 TPMS 曲面的坐标, Weierstrass 函数是一种参数表达形式^[12], 即

$$\begin{cases} x = \operatorname{Re} \int_{\omega_0}^{\omega} e^{i\theta} (1-\tau^2) R(\tau) d\tau \\ y = \operatorname{Re} \int_{\omega_0}^{\omega} e^{i\theta} (1-\tau^2) R(\tau) d\tau \\ z = \operatorname{Re} \int_{\omega_0}^{\omega} e^{i\theta} (1-\tau^2) R(\tau) d\tau \end{cases} \quad (1)$$

其中, 曲面各点的笛卡儿坐标由轮廓积分的实部 (Re) 表示, 该方法可以表达的 TPMS 种类有限. 此外, 最常用的 TPMS 表示方法是通过傅里叶级数定义的方程

$$\Psi(r) = \sum_k F(\mathbf{k}) \cos[2\pi\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \alpha(\mathbf{k})] = 0 \quad (2)$$

其中, $F(\mathbf{k})$ 表示振幅因子; \mathbf{k} 表示晶格矢量; $\alpha(\mathbf{k})$ 表示相位偏移. 通过将傅里叶级数中的高频项截断, 可得到由三角函数组合的近似表达式. 当表达式右侧为常数 C 时, $\Psi(x, y, z) = C$ 定义了一个水平集, 所代表的曲面结构也称为三周期水平集曲面^[13]. 这些曲面中有些非常接近于已知的极小曲面, 特别是 P, D, G 极小曲面与其对应的水平集曲面常用相同的名称进行表述. 表 1 展示了 P, D, G 类型的水平集曲面与极小曲面, 并通过叠加显示用水平集曲面近似表达极小曲面的效果. TPMS 的近似表达式 $\Psi(x, y, z) = 0$ 是该水平集所表示的 0 等值面.

常见的 3 种 TPMS 近似表达式为

$$\Psi_P(x, y, z) = \cos(x) + \cos(y) + \cos(z) = C \quad (3)$$

$$\Psi_D(x, y, z) = \cos(x)\cos(y)\cos(z) - \sin(x)\sin(y)\sin(z) = C \quad (4)$$


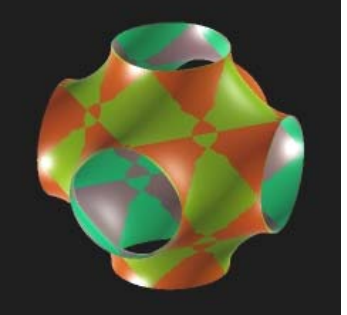
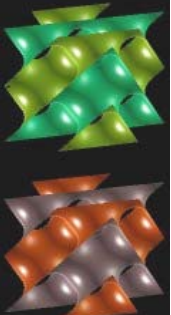
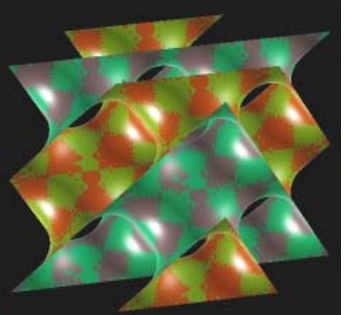

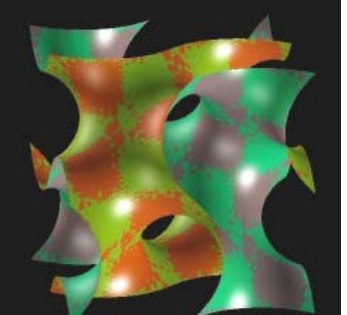
$$\Psi_G(x, y, z) = \sin(x)\cos(y) + \sin(z)\cos(x) + \sin(y)\cos(z) = C \quad (5)$$

当式(3)~式(5)中 $C \neq 0$ 时, 同样可得到一系列平均曲率(不为 0)处处相同的特殊曲面, 称为常平均曲率曲面, 这一类曲面也可视为对 TPMS 变形得到的. 另一类对 TPMS 曲面的变形是通过将 TPMS 曲面沿法向偏移一个恒定的距离而得到的, 其具有均匀厚度的薄壳模型. 目前, 基于 TPMS 的几何建模方法基本均采用了上述 2 种思路.

1.2 TPMS 的性质

TPMS 具有许多优良的性质^[14]: (1) 作为一种极小曲面, 平均曲率处处为 0, 具有光滑性; (2) 具有全连通的特性, 即实体与空腔部分均分别具有连续性, 不存在独立的空腔; (3) 具有较高的表面

表 1 通过水平集曲面近似表达极小曲面

| 类型 | 水平集曲面(绿色)和极小曲面(橙色) | 水平集曲面近似误差 |
|-----|---|--|
| P |  |  |
| D |  |  |
| G |  |  |

积与体积比, 在医药、组织工程、传热等应用中非常重要; (4) 具有高比强度和刚度. 因此, TPMS 被广泛地应用于生成各类支撑结构.

TPMS 将空间划分为 2 个不相交的子空间, 如果 2 个子空间体积和形态相同, 那么称这类 TPMS 为平衡曲面, 否则称为不平衡曲面, 典型的平衡曲面为 Gyroid(G). Molnár^[15]提出了找到所有满足平衡性 TPMS 的方法.

P, D 和 G 类型 TPMS 均为亏格为 3 的曲面, 其可以通过 Bonnet 变换^[16]实现相互转化. 该变换对内蕴几何性质不产生破坏, 可以保持高斯曲率、平均曲率以及保角和保距离. 然而, 该变化在实际实验中难以实现.

在对 TPMS 结构特性进行分析时, 常通过如图 2 所示中心连线得到的骨架图方式进行处理. Sadoc 等^[8]提出一种通过合并或分离骨架图中节点

的方式,实现从 P 、 D 和 G 类型的连续转化方法.此外,也可采用中间曲面^[7]或通过菱形、四边形变形^[17]等方法实现曲面间的相互转化.

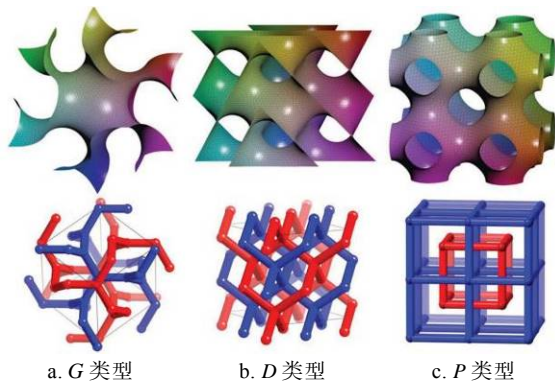


图 2 不同 TPMS 单元及其骨架示意图^[11]

1.3 TPMS 的应用

TPMS 在植入物、轻量化设计、减震、吸声和传热传质等多方面有着广泛的应用.此外,TPMS 具有的美学特性还常被用于建筑设计^[18]和艺术品设计中.Rao 等^[19]使用 TPMS 生成基本形状,同时在 TPMS 表面通过 Voronoi 图生成不同尺度的孔洞,得到了美观的双尺度多孔结构.

TPMS 还可用于桁架结构的设计^[20].利用三维静力平衡,通过控制标准立方体的细分方式(六面体或四面体细分),构建受力图与结构图的对偶关系.通过将受力图中的封闭单元和内部面对应于结构图的节点和边,从而得到如图 3a 所示杆状结构近似表达的 TPMS 结构.该方法同样适用于变形的六面体单元.

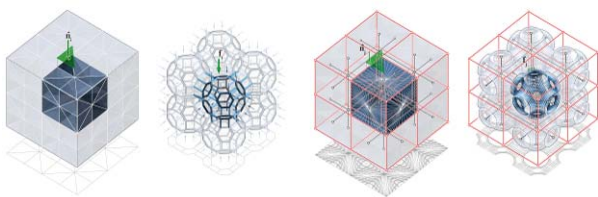


图 3 在桁架结构设计中应用 TPMS^[20]

以下将结合 TPMS 的性质和建模方法,详细介绍 TPMS 在各领域的应用.

2 TPMS 的结构性能

在机械、材料和生物医学等领域中,有许多对 TPMS 基本单元的力学性能(如强度、刚度、弹性等)、传热传质、组织工程和声学等各项性能的研究.

2.1 力学性能

G 类型 TPMS 结构受到了研究人员广泛的关注.Yan 等^[21]对 G 类型结构在选择性激光熔化(selective laser melting, SLM)工艺中的可制造性进行实验,发现该结构满足自支撑性;同时,对单元大小与弹性模量以及屈服强度等力学性能的关系进行了分析. G 类型变形后单元的力学性质也受到了关注^[22].变形后的 G 单元在纵向有更好的强度和刚性.而在扭曲测试中,扭转强度和刚度与单元的孔隙度有关.在高孔隙度(90%)时,普通 G 单元的扭转强度和刚度比变形后的更强;在低孔隙度(75%)时,两者性能基本相同.

Khaderi 等^[23]分析了单元的相对密度与弹性模量、剪切模量和体积模量的关系,以及不同负载与缺陷条件下的机械性能,发现单元节点的缺陷会显著地影响结构整体的强度和刚性.Abueidda 等^[24]通过有限元方法(finite element method, FEM)分析了 Schoen I-wrapped package(I-WP), P , N , CLP 等类型的 TPMS 的弹性模量,发现 CLP 具有最强的各向异性, P 具有最高的剪切模量,而 I-WP, N 和 P 具有较高的体积模量.在最近的一项工作中,Liu 等^[25]提出了基于渐进均质化方法的分析工具,并据此构建了 TPMS 等微结构单元的力学性能画像,通过雷达图等多种方式全面展示了其力学性能.这对分析、理解和应用 TPMS 等微结构具有重要的意义.

2 种基材料均为固体且连续的结构称为双组分结构,当两组分分别为硬质与软质时,具有优异的性质,如刚性、强度、抗冲击和吸能等^[26].Wang 等^[27]使用 3D 打印制造了玻璃和橡胶聚合物的双组分 TPMS 结构.通过实验发现,如图 4 所示 TPMS 结构具有良好的能量耗散机制,其中 I-WP 具有最高的屈服强度和最高的杨氏模量^[28].



图 4 基于 I-WP 类型双组分结构压缩实验^[28]

在材料领域已有综述^[29]总结了 TPMS 力学性能的相关工作,感兴趣的读者可以进一步阅读.

2.2 传热传质

TPMS 结构的机械性能已经得到了广泛的关注,但有关传热和传质的工作较少.将 TPMS 应用

于传热传质装置是由 Slaughter^[30]首先提出的. 热交换器的设计中有以下要求^[31]:

(1) 压降. 压降应在允许范围内, 以便自由流动区域能够满足设计要求.

(2) 热效率. 热效率由传热系数和传热表面积决定.

(3) 结垢. 应当避免突起等容易产生结垢的机制.

TPMS 具有的高表面积体积比以及低流体流动阻力非常适用于热交换器的设计. Peng 等^[32]通过计算流体动力学软件模拟了 *G* 类型 TPMS 内部的流体流动特性, 分析了其传热性能, 并通过选择性激光烧结打印进行了制造验证. Li 等^[33]将 *G* 类型与 *D* 类型 TPMS 用于超临界二氧化碳循环换热器的设计, 并通过模拟确定了几何形状和雷诺数对热力性能的影响. 研究表明, TPMS 换热器相比传统刷电路热交换器整体热性能提高了 15%~100%. Femmer 等^[34]分析了 TPMS 的传质和结垢行为, 研究发现 TPMS 的光滑性可以防止拓扑变化引起的结垢. TPMS 结构用于相变材料的热存储^[35], 可减少相变材料的融化时间, 提高传热系数, 与传统的金属泡沫相比, TPMS 结构具有更好的传热性能. 孔隙的控制微反应器、热管路等设计中具有重要意义. 雷鸿源等^[36]建立了 TPMS 参数与孔隙表征参数的映射关系模型, 并以制氢微反应器为例进行了实验验证.

膜技术在植入式血氧器(人工肺)、燃料电池、气体交换器、废水处理和海水淡化等领域有广泛应用. 近年来, 采用 TPMS 结构制造聚二甲基硅氧烷 (polydimethylsiloxane, PDMS) 膜用于气液交换^[37]也受到了关注. 如图 5 所示, 与传统膜结构相比, PDMS 膜在向水中传递二氧化碳中显示出优良的性质. 受限于打印精度, 目前制造的膜厚度约为 1 mm, 无法应用于实际工程中, 随着制造精度的进一步提升, 该方向具有广阔的前景.

2.3 组织工程

适用于组织工程的支架结构, 应当满足以下性质^[38]:

(1) 支架结构应当在结构和功能性上与生物结构相似, 近似于人体中的多孔结构;

(2) 具有较大的表面积和孔隙, 为细胞和组织生长提供足够的空间;

(3) 支架应当满足开孔结构, 即孔之间彼此相互连通;

(4) 孔间的连接尽可能光滑, 曲折尽可能小;

(5) 具有足够的机械强度和韧性;

(6) 具有高渗透性, 以便于营养物质的输送和代谢废物的排出.

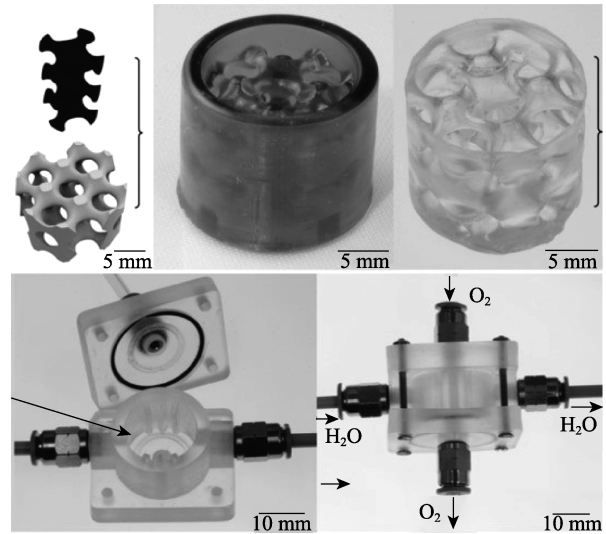


图5 圆柱形 TPMS-PDMS 水/氧交换模块^[37]

Rajagopalan 等^[38]发现 TPMS 天然满足组织工程中的诸多需求, 并首次将 TPMS 应用于组织工程支架, 从孔隙率调节、机械强度和生物相容性等方面进行了探索. 李卓等^[39]分析了 TPMS 不同朝向及光滑性对渗透性的影响. Melchels 等^[40]通过实验发现, TPMS 支架与传统支架相比具有 10 倍以上的渗透性, 良好的渗透性使得支架内部有大量细胞生长分布.

天然骨质是一种典型的各向异性材料, 在选择植入物时, 应当具有与天然骨相近的力学特性. TPMS 在孔隙率、杨氏模量、渗透性和压缩性能上与天然骨质非常接近^[41], 因此, 它是一种常用的支架材料. Lu 等^[42]基于均质化方法对 5 种常用的 TPMS 结构力学性质进行了分析. 由于 TPMS 单元所具有的立方对称性, 限制了其各向异性行为, 因此, 为了更好地贴近天然骨的性质, 需要设计不同孔隙的多级梯度 TPMS 结构.

2.4 声学

具有阻挡声波沿任何方向传播的结构称为完全带隙, 声学带隙的存在可以实现对不同频率范围能量的控制, 因此, 它在包括勘探、医学和噪声控制等领域具有重要作用. Abueidda 等^[43]采用 FEM 仿真首次对 TPMS 结构的声学带隙和声衰减性能进行了研究, 发现通过控制壁厚得到不同孔隙度的 TPMS, 可以实现对带隙宽度的调整. Yang 等^[44]采用立体光刻 3D 打印技术制备了几种典型的

TPMS 结构,并在 2~6 kHz 频率范围的声波对体积分数、孔隙尺寸以及高度等几何参数的吸声性能进行了实验,发现 D 类型具有较优异的吸声性能。

3 TPMS 建模方法

从建模尺度上,可以将 TPMS 建模方法分为规则单元法、参数单元法、区域拼接法和整体优化法。下面详细介绍它们各自的特点以及适用场景。

3.1 规则单元法

规则单元法将 TPMS 单胞在笛卡儿空间的 3 个方向上作平铺,并通过布尔运算等方法进行裁剪,从而得到所需的结构。这类方法操作简单但表达能力较为有限,在组织工程中对结构复杂度要求不高的领域较为常用。

规则 TPMS 具有对称性和周期性,可以表达原子和分子等微观结构^[45]。隐式表达的 TPMS 通常使用 Marching Cubes 算法转化为网格模型,当网格中三角面数量过大时,网格的布尔运算将十分耗时。可使用距离场表达模型的外形,并将模型距离场与 TPMS 标量场进行布尔运算^[46],以避免对网格模型做布尔运算带来的问题。

组织工程要求结构具有较高的表面积与体积比,通过在同一空间内提取多个 TPMS 等值面,可得到高孔隙度的结构^[47]。多级多孔材料是在同一结构中拥有不同尺度孔径和孔隙率的材料^[48],多级结构对提高材料的整体性能具有许多好处,在催化、吸附和分离等^[49]应用中具有重要意义。通过距离场表达目标形状的外形,对于不同尺度的 TPMS 结构通过对标量场递归做布尔运算,可得到多级 TPMS 结构^[50]。该方法通过取各个截面的二维图像数据直接生成相应的打印文件,无需重建网格表达的三维模型。

在使用 TPMS 表达的复杂微结构中,数以万计的微孔会造成网格表达的模型数据量巨大,这为切片处理和路径规划等后续操作带来了巨大的挑战。探索适合增材制造的建模与表达方法变得更加重要。利用 TPMS 可通过距离场表达的特点,可以基于 Marching Squares 算法无需重建网格,直接生成用于增材制造的打印路径。其中,通过滚圆法保证结构壁厚的均匀性^[51],可实现如图 6 所示对薄壳结构的表达与制造。而对于实体类模型,可直接从 TPMS 表达的距离场中提取各层对应的二维轮廓数据。此外,该方法还支持生成图 7 所示层

次化的 TPMS 结构,即在初始 TPMS 实体内进一步利用 TPMS 方程计算得到下一层的 TPMS 结构^[52]。

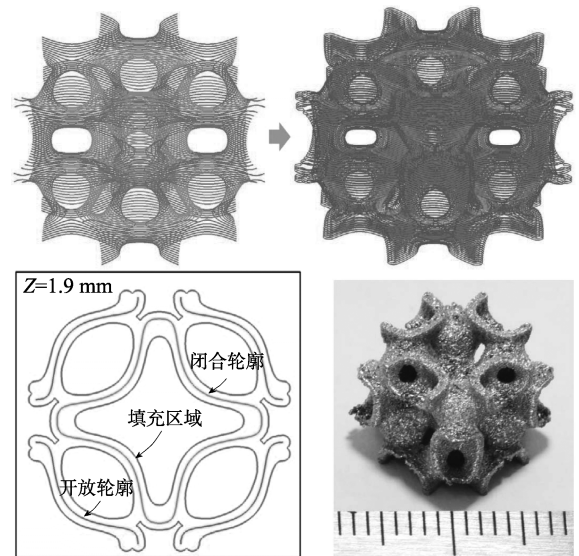


图 6 薄壳结构的路径生成与 SLM 制造验证^[51]

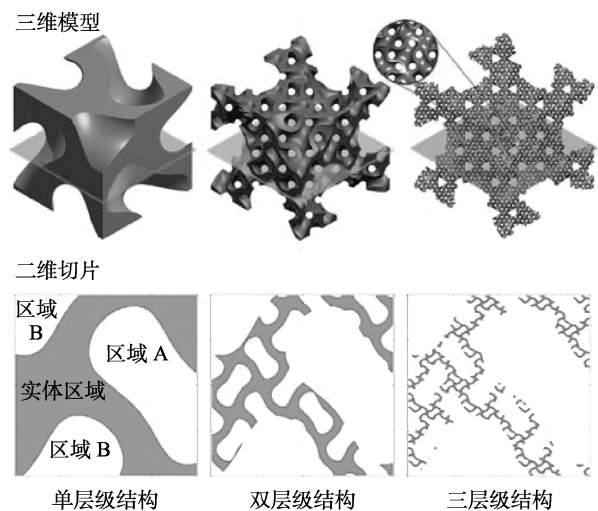


图 7 多层级(3-level)TPMS 结构的生成^[52]

3.2 参数单元法

参数单元法将整个建模空间划分为六面体等类型的单元,随后通过空间映射将 TPMS 单胞嵌入各个单元空间中。该类方法允许对六面体单元进行变形,使得结构适应模型边界。最直接的方法是将模型体素化,如图 8 所示在每个体素单元内赋予相应的 TPMS 单元^[53]。通过对体素单元 8 个顶点定义权重,实现对一个单元空间内 TPMS 等值面的控制,以及对孔隙率的近似控制。相邻单元采用线性插值等方式实现不同类型单元的连接过渡。

为了更好地保持模型边界,可将输入模型转化为六面体网格,通过将标准 TPMS 单元映射

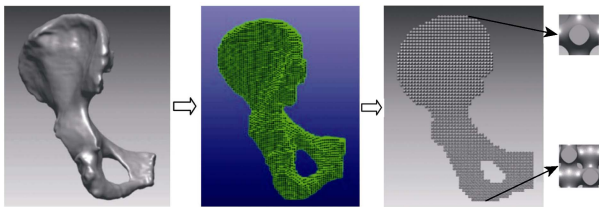


图8 参数单元法得到的 TPMS 组织工程支架^[53]

到六面体网格单元的方式生成所需的多孔结构^[54]。王清辉等^[55]采用双重轮廓线方法对骨支架模型进行网格划分,以骨骼微观结构的平均孔径为基准建立骨支架六面体网格模型,并对六面体网格顶点进行随机调整,如图9所示,使结构在统计意义上接近骨骼孔径分布的规律。通过形函数对 TPMS 造孔单元进行等参变换,将其映射到非正六面体网格中,从而得到满足要求的支架结构。

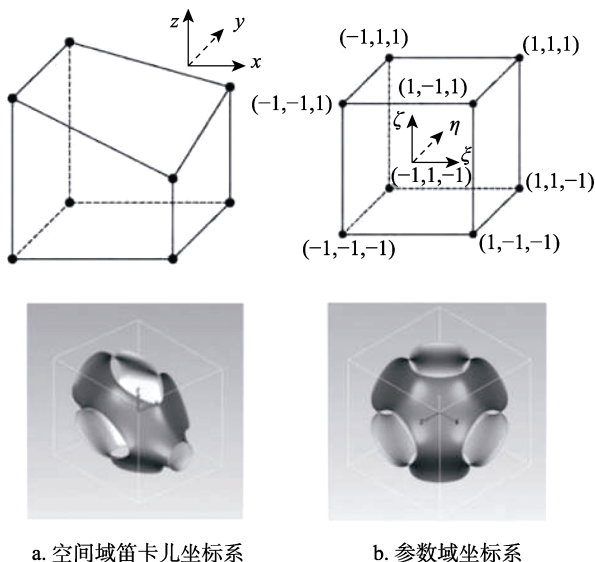


图9 等参单元坐标变换^[55]

3.3 区域拼接法

区域拼接法是指将建模空间根据需要预先划分为几个独立的区域,在每个区域内单独生成 TPMS 结构,通过布尔运算、插值等方式将各区域连接成整体。

区域划分中常用的标准是模型的强度与质量比,即在保证强度的条件下减少材料用量。其基本思路是根据应力分布将模型分割为相互独立的子区域后,在各个子区域内根据应力场生成变密度的 TPMS 结构,最后将各子区域通过布尔运算进行合并。

在计算应力时,常用的 FEM 存在计算效率较低的问题,采用基于横截面的分析方法可显著提高求解效率^[56]。在各子区域内,为降低优化求

解的计算量,可在分割得到的子区域内设置相同的频率值^[57];随后将频率和壁厚作为优化变量进行求解。在图10所示区域拼接法中,各区域可采用不同频率甚至不同类型的 TPMS 填充,直接将各子区域进行布尔合并会破坏模型内部 TPMS 的双连通性,在拼接区域形成不连续的边界。

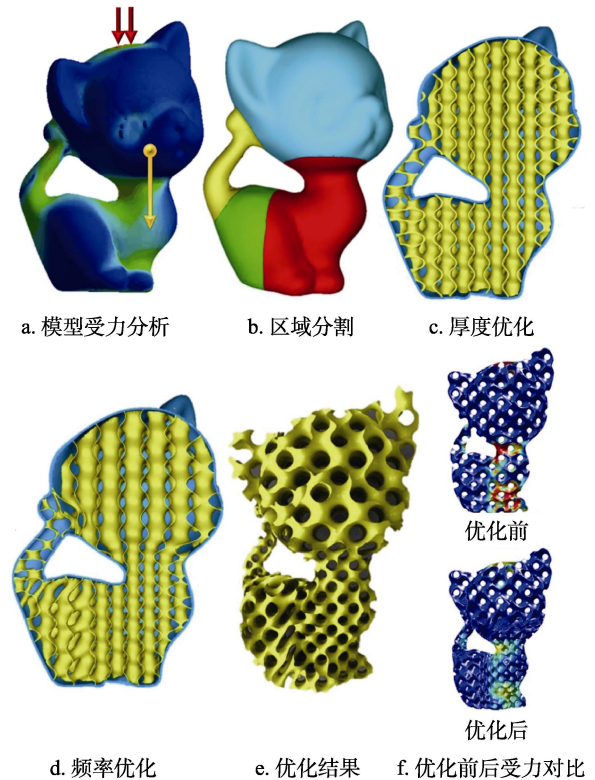


图10 区域拼接法优化内部结构^[57]

为保证拼接后各区域间 TPMS 结构的连续性和光滑性等性质,通过紧支径向基函数^[57], Sigmoid 函数、高斯径向基函数^[58]和 β 增长函数^[59]等各类插值的方式,保证了不同类型、不同频率区域间的光滑过渡。

3.4 整体优化法

无论是单元法还是区域拼接法的表达能力均较为有限,对 TPMS 的性质也有不同程度的破坏。近年来,整体优化法得到了研究人员的关注,它通常将物体的建模空间用一个场统一表示,并通过优化 TPMS 的参数(如周期、壁厚等)得到满足条件的结构。

Wang 等^[60]在 TPMS 生成中引入了优化的思想,通过标准 TPMS 单元与给定模型的布尔运算得到初始 TPMS,采用 FEM 得到应力分布,将不满足受力的区域频率逐渐增加,直至更新的结构满足受力。然而,该方法得到的结构会存在不连续的现象。

TPMS 的双连通性可用于多材料的混合制造^[61]. 通过将外力作用下的应力场作为指导生成自适应分布的 TPMS 结构, 并通过图 11 所示频率和厚度交替优化的方式得到满足受力要求的内部结构. 通过对频率的局部修改, 保证变形后的 TPMS 依然满足准免支撑的性质. 最后, 向优化的 TPMS 通道内注入高强度材料(如环氧树脂、碳纤维增强材料等)使结构具有更好的力学性能.



图 11 在 TPMS 内注入材料(淡蓝色)提升结构强度^[61]

传统优化方法普遍存在难以计算梯度、优化求解速度慢的问题. 对此, Hu 等^[62]提出基于函数的模型表达, 分析及优化方法. 其中通过对频率和周期的交替优化方法, 得到满足给定外力条件的内部结构. 在宽度优化中, 针对等值面参数 C 无法控制壁厚 W 的问题, Hu 等^[62]提出了拟合公式用于近似表达壁厚 W 与 C 的关系. 如图 12 所示, 在频率优化中, 通过隐式方程指导的离散化方法, 实现积分和梯度计算, 避免了传统基于 FEM 的优化计算中网格重建的步骤, 提高了 TPMS 结构优化计算的效率.

除网格模型外, 参数曲面也是一种常用的模

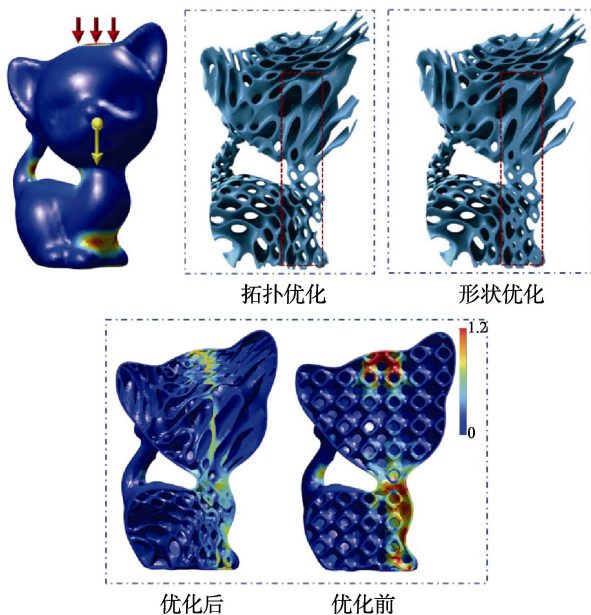


图 12 通过频率和壁厚优化得到满足受力的结果^[62]

型表达方式. 在参数表达的模型内, 生成 TPMS 结构方法的基本思想: 在参数空间内进行建模与优化, 随后映射回笛卡儿空间. 对于 B 样条表达的模型, 可通过用户定义的标量场控制结构孔隙度, 并设计新的数据格式实现复杂结构的高效存储^[63]. 作为最新的样条曲面建模方法, Feng 等^[64]对 T 样条的 TPMS 建模开展了一系列工作. 通过在 T 样条控制网格立方体的空间内, 由密度函数控制 TPMS 的密度, 从而实现如图 13 所示非均匀分布, 随后在控制点的驱动下整体变形为目标形状. 该方法避免了传统方法所需的布尔运算, 但缺点在于 TPMS 经扭曲变形后, 密度和孔隙度等属性无法保持不变. 对有受力要求的结构^[65], 采用基于横截面的方法分析 TPMS 单元性能, 并通过粒子群优化实现对优化效率的提升. 此外, 为了提高计算效率, Feng 等^[66]提出了可以将 T 样条模型离散为二维截面, 从而在二维空间中高效设计生成 TPMS 结构. 然而, T 样条表达建模能力较为有限, 仅支持部分 0 亏格的凸模型.

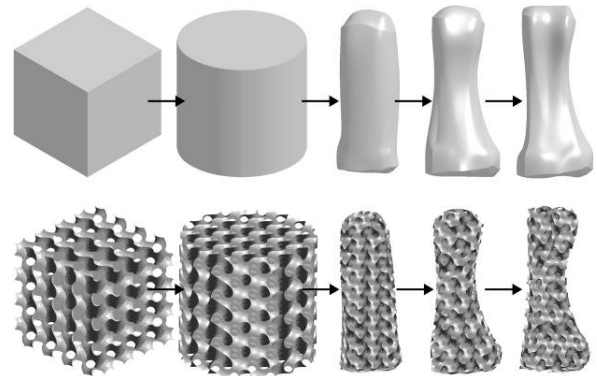


图 13 T 样条表达模型 TPMS 生成过程^[64]

该类方法的优势在于可以在参数空间内进行 TPMS 的高效表达与生成, 但受限于参数表达的能力. 目前的缺点在于对亏格不为 0 的复杂模型表达能力较差, 需通过用户交互等方式预分割.

拓扑优化是根据物体的负载和约束条件调整材料分布的方法, 被广泛应用于结构设计和优化中. 将 TPMS 用于拓扑优化, 可解决拓扑优化难以保证实体空腔和连续性以及制造性(如免支撑)等问题. 目前, 有 2 种手段可实现将 TPMS 单元应用于拓扑优化: 一是将拓扑优化输出的密度场使用对应的 TPMS 单元进行替换. 如图 14 所示, 根据拓扑优化中单元密度与晶格结构的映射方法^[67], 建立单元密度与 TPMS 结构的映射, 从而生成兼具两者优势的新型结构, 使其具有良好刚度的同

时对负载的扰动不敏感^[68]. 然而, 该方法密度与力学性质映射的精度较低, 且无法保证不同单元

能和散热性能的同时优化^[70].

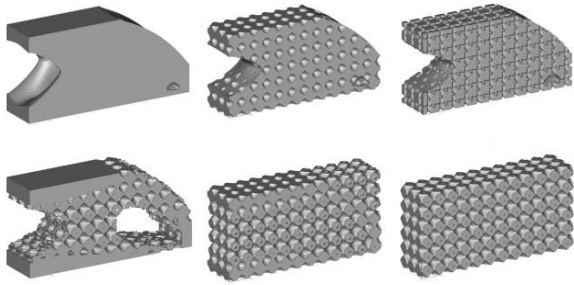


图 14 TPMS 与拓扑优化相结合得到的结果^[67]

另一种方法是根据均质化理论, 将预定义单元根据相应的性质映射到原结构. 通过建立从材料力学属性(如杨氏模量、泊松比)到单元结构的逆均质化映射, 并利用生成对抗网络生成相应隐式表达的 TPMS 单元. 与传统方法相比, 均质化方法具有更高的精度, 更接近于直接拓扑优化后的力学性质^[69]. 除力学性能外, 均质化方法也可应用于热学、流体和声学等领域, 采用均质化方法还可建立多目标的优化模型. 例如, 同时考虑结构承载的力学性能以及散热要求, 实现对结构的承载性

4 总结与展望

TPMS 作为一种仿生结构, 得到了许多领域的重视; 同时, 其作为一种隐式表达的几何建模工具, 具有强大的表达能力, 可以通过简单的数学表达具有复杂几何和拓扑的结构. 本文从 TPMS 的定义、数学表达、性质、应用以及几何建模方法等方面对现有的工作进行了综述, 表 2 所示为对目前基于 TPMS 进行建模及目标性能的典型工作进行了汇总.

单元法由于其简单、直接的优点, 应用最为广泛. 区域拼接法通过对建模空间的预分割, 相比单元法可以实现更优的材料分布. 整体优化法是近年来受到研究人员关注最多的方法, 其对建模空间进行整体表达, 可以通过少量参数实现对整体结构的优化, 目前在考虑受力的结构轻量化设计中已取得了一些成果. 然而, 当前的 TPMS 建模方法仍存在一定的局限性, 具体如下:

(1) 扭曲单元的力学性质. 在单元法中, 对 TPMS 单胞作均匀平铺后进行裁剪的方法, 会破坏

表 2 TPMS 代表性工作及性能指标

| 方法 | 文献 | 评价指标 | | | | | | | 优化 |
|-------|------|------|----|----|----|----|----|----|----|
| | | 轻量 | 弹性 | 吸能 | 传热 | 传质 | 生物 | 美学 | |
| 规则单元法 | [24] | | √ | | | | | | |
| | [44] | | | √ | | | | | |
| | [50] | | | | | | √ | | |
| | [52] | | | | √ | | √ | | |
| | [19] | √ | | | | | | | √ |
| 参数单元法 | [53] | | | | | | √ | | |
| | [54] | | | | | | √ | | |
| | [55] | | | | | | √ | | |
| 区域拼接法 | [56] | √ | | | | | | | |
| | [57] | | | | | | √ | | |
| | [58] | √ | | | | | | | |
| | [59] | √ | | | | | | | √ |
| 整体优化法 | [63] | √ | | | | | √ | | |
| | [60] | √ | | | | | √ | | √ |
| | [61] | √ | | | | | | | √ |
| | [62] | √ | | | | | | | √ |
| | [64] | √ | | | | | | | √ |
| [69] | √ | | | | | | | √ | |

注. √表示文献所采用的方法满足相应的评价指标.

表面附近单元的完整性;而对物体进行六面体划分也不可避免地会造成单元的扭曲. 以力学性能为例, 2 种情况得到的单元均与标准单胞的性能不同, 从而造成整体结构受力性能不准确. 找到更优的建模空间划分方法, 尽可能地减小 TPMS 单胞的扭曲, 以及如何对扭曲后单胞性质进行快速仿真分析, 还有待进一步探索.

(2) 拼接中的边界性质. 尽管目前提出了许多插值函数用于 TPMS 单元的拼接, 然而拼接后 TPMS 所具有的实体和空腔双连通的性质无法得到保证. 当平均曲率在插值区域的突变以及空腔连通性被破坏时, 在传热、组织工程等业务中会带来一系列问题. 需要找到更好的拼接方法, 尽可能地减少扭曲, 以保证连续性等 TPMS 良好的性质.

(3) 高效优化. 在 TPMS 面向受力的应用中, 优化是非常耗时的步骤, 特别是有限元分析, 如何设计更为高效的仿真分析和优化框架. 此外, 在除受力外的其他应用中, 鲜有工作在建模分析中考虑优化问题, 多目标优化仍有待探索.

(4) TPMS 参数的理解. 对于 TPMS 中参数语义的理解与直接控制仍不明确, 例如, 现有工作常常通过在 TPMS 表达式中 x, y, z 坐标前添加系数 ω 的方式实现对周期的控制, 而壁厚通过等值面 C 控制, 这两者均是近似表达, 目前仍无法对周期和壁厚进行直接、准确的控制. 基于此进行优化, 对周期和壁厚的改变会破坏 TPMS 平均曲率为 0 的性质.

(5) 高效表达与路径生成. 在将 TPMS 用于微结构的表达与制造时, 采用常用的网格模型会产生巨大的数据量, 对模型数据的存储、传输、打印切片与路径规划等均会造成许多问题. 面向制造任意复杂模型, 根据目标性能直接从隐式表达实现结构优化并生成打印文件是值得探索的方向.

参考文献(References):

- [1] Hu D Y, Wang Y Z, Song B, *et al.* Energy-absorption characteristics of a bionic honeycomb tubular nested structure inspired by bamboo under axial crushing[J]. *Composites Part B: Engineering*, 2019, 162: 21-32
- [2] Nissen H U. Crystal orientation and plate structure in echinoid skeletal units[J]. *Science*, 1969, 166(3909): 1150-1152
- [3] Almsheerqi Z A, Landh T, Kohlwein S D, *et al.* Cubic membranes: the missing dimension of cell membrane organization[J]. *International Review of Cell and Molecular Biology*, 2009, 274: 275-342
- [4] Seago A E, Brady P, Vigneron J P, *et al.* Gold bugs and beyond: a review of iridescence and structural colour mechanisms in beetles (Coleoptera)[J]. *Journal of the Royal Society Interface*, 2009, 6(suppl 2): S165-S184
- [5] Galusha J W, Richey L R, Gardner J S, *et al.* Discovery of a diamond-based photonic crystal structure in beetle scales[J]. *Physical Review E*, 2008, 77(5): Article No.050904
- [6] Schoen A H. Infinite periodic minimal surfaces without self-intersections[R]. Washington D C: NASA, 1970
- [7] Benedicto A D, O'Brien D F. Bicontinuous cubic morphologies in block copolymers and amphiphile/water systems: mathematical description through the minimal surfaces[J]. *Macromolecules*, 1997, 30(11): 3395-3402
- [8] Sadoc J F, Charvolin J. Infinite periodic minimal surfaces and their crystallography in the hyperbolic plane[J]. *Acta Crystallographica Section A: Foundations of Crystallography*, 1989, 45(1): 10-20
- [9] Liu Ligang, Xu Wenpeng, Wang Weiming, *et al.* Survey on geometric computing in 3D printing[J]. *Chinese Journal of Computers*, 2015, 38(6): 1243-1267(in Chinese) (刘利刚, 徐文鹏, 王伟明, 等. 3D 打印中的几何计算研究进展[J]. *计算机学报*, 2015, 38(6): 1243-1267)
- [10] Do Carmo M P. Differential geometry of curves and surfaces: revised and updated second edition[M]. New York: Dover Publications Inc., 2016
- [11] Han L, Che S. An overview of materials with triply periodic minimal surfaces and related geometry: from biological structures to self-assembled systems[J]. *Advanced Materials*, 2018, 30(17): Article No.1705708
- [12] Nitsche J C. Lectures on minimal surfaces[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1989
- [13] Hoffman J T. Level sets approximating minimal surfaces[OL]. [2021-09-14]. <https://www.msri.org/publications/sgp/jim/geom/level/minimal/index.html>
- [14] Cvijović D, Klinowski J. The T and CLP families of triply periodic minimal surfaces. Part 1. Derivation of parametric equations[J]. *Journal De Physique I*, 1992, 2(2): 137-147
- [15] Molnár E. On triply periodic minimal balance surfaces[J]. *Structural Chemistry*, 2002, 13(3/4): 267-275
- [16] Hyde S T, Andersson S. A cubic structure consisting of a lipid bilayer forming an infinite periodic minimum surface of the gyroid type in the glycerolmonooleat-water system[J]. *Zeitschrift Für Kristallographie-Crystalline Materials*, 1984, 168(1/2/3/4): 213-220
- [17] Schröder-Turk G E, Fogden A, Hyde S T. Bicontinuous geometries and molecular self-assembly: comparison of local curvature and global packing variations in genus-three cubic, tetragonal and rhombohedral surfaces[J]. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 2006, 54(4): 509-524
- [18] Tenu V. Minimal surfaces as self-organizing systems: a particle spring system simulation for generating triply periodic minimal surface tensegrity structure[D]. London: UCL (University College London), 2009
- [19] Rao C, Xu F, Tian L, *et al.* Bi-scale porous structures[C] //Proceedings of the SMI 2019 Fabrication & Sculpting Event (FASE). Vancouver: ISAMA Press, 2019: 73-76
- [20] Akbari M, Mirabolghasemi A, Akbarzadeh H, *et al.* Geometry-based structural form-finding to design architected cellular

- solids[C] //Proceedings of ACM Symposium on Computational Fabrication. New York: Association for Computing Machinery Press, 2020: Article No.3
- [21] Yan C Z, Hao L, Hussein A, *et al.* Evaluations of cellular lattice structures manufactured using selective laser melting[J]. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 2012, 62: 32-38
- [22] Yáñez A, Cuadrado A, Martel O, *et al.* Gyroid porous titanium structures: a versatile solution to be used as scaffolds in bone defect reconstruction[J]. *Materials and Design*, 2018, 140: 21-29
- [23] Khaderi S N, Deshpande V S, Fleck N A. The stiffness and strength of the gyroid lattice[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, 51(23/24): 3866-3877
- [24] Abueidda D W, Abu Al-Rub R K, Dalaq A S, *et al.* Effective conductivities and elastic moduli of novel foams with triply periodic minimal surfaces[J]. *Mechanics of Materials*, 2016, 95: 102-115
- [25] Liu P Q, Liu A, Peng H, *et al.* Mechanical property profiles of microstructures via asymptotic homogenization[J]. *Computers & Graphics*, 2021, 100: 106-115
- [26] Ashby M F. *Materials selection in mechanical design*[M]. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2005
- [27] Wang L F, Lau J, Thomas E L, *et al.* Co-continuous composite materials for stiffness, strength, and energy dissipation[J]. *Advanced Materials*, 2011, 23(13): 1524-1529
- [28] Al-Ketan O, Adel Assad M, Abu Al-Rub R K. Mechanical properties of periodic interpenetrating phase composites with novel architected microstructures[J]. *Composite Structures*, 2017, 176: 9-19
- [29] Al-Ketan O, Abu Al-Rub R K. Multifunctional mechanical metamaterials based on triply periodic minimal surface lattices[J]. *Advanced Engineering Materials*, 2019, 21(10): Article No.1900524
- [30] Slaughter V B. Method of using minimal surfaces and minimal skeletons to make heat exchanger components: US20080149299 [P]. 2008-06-26
- [31] Southall D, Le Pierres R, Dewson S J. Design considerations for compact heat exchangers[C] //Proceedings of ICAPP. Anaheim: ICAPP Press, 2008, Article No.8009
- [32] Peng H, Gao F, Hu W. Design, modeling and characterization of triply periodic minimal surface heat exchangers with additive manufacturing[C] //Proceedings of the 30th Annual International Solid Freeform Fabrication Symposium—An Additive Manufacturing Conference. Austin: ETH-Zürich, 2019: 2325-2337
- [33] Li W H, Yu G P, Yu Z B. Bioinspired heat exchangers based on triply periodic minimal surfaces for supercritical CO₂ cycles[J]. *Applied Thermal Engineering*, 2020, 179: Article No.115686
- [34] Femmer T, Kuehne A J, Wessling M. Estimation of the structure dependent performance of 3-D rapid prototyped membranes[J]. *Chemical Engineering Journal*, 2015, 273: 438-445
- [35] Qureshi Z A, Elnajjar E, Al-Ketan O, *et al.* Heat transfer performance of a finned metal foam-phase change material (FMF-PCM) system incorporating triply periodic minimal surfaces (TPMS)[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2021, 170: Article No.121001
- [36] Lei Hongyuan, Li Jingrong, Xu Zhijia, *et al.* TPMS-based porous structures modelling driven by pore characteristic parameters[J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2020, 32(1): 156-163+172(in Chinese)
(雷鸿源, 李静蓉, 徐志佳, 等. 孔隙表征参数驱动的 TPMS 多孔结构建模[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2020, 32(1): 156-163+172)
- [37] Femmer T, Kuehne A J C, Torres-rendon J, *et al.* Print your membrane: rapid prototyping of complex 3D-PDMS membranes via a sacrificial resist[J]. *Journal of Membrane Science*, 2015, 478: 12-18
- [38] Rajagopalan S, Robb R A. Schwarz meets Schwann: design and fabrication of biomorphic and durataxic tissue engineering scaffolds[J]. *Medical Image Analysis*, 2006, 10(5): 693-712
- [39] Li Zhuo, Wang Qinghui, Xu Zhijia. Micro-modeling of porous metal fibrous structure and its permeability study[J]. *Modern Manufacturing Engineering*, 2016(6): 6-8(in Chinese)
(李卓, 王清辉, 徐志佳. 多孔金属纤维微观建模及孔隙渗透特性研究[J]. *现代制造工程*, 2016(6): 6-8)
- [40] Melchels F P W, Bertoldi K, Gabbriellini R, *et al.* Mathematically defined tissue engineering scaffold architectures prepared by stereolithography[J]. *Biomaterials*, 2010, 31(27): 6909-6916
- [41] Chen H, Han Q, Wang C Y, *et al.* Porous scaffold design for additive manufacturing in orthopedics: a review[J]. *Frontiers in Bioengineering and Biotechnology*, 2020, 8: 609
- [42] Lu Y T, Zhao W Y, Cui Z T, *et al.* The anisotropic elastic behavior of the widely-used triply-periodic minimal surface based scaffolds[J]. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2019, 99: 56-65
- [43] Abueidda D W, Jasiuk I, Sobh N A. Acoustic band gaps and elastic stiffness of PMMA cellular solids based on triply periodic minimal surfaces[J]. *Materials & Design*, 2018, 145: 20-27
- [44] Yang W J, An J, Chua C K, *et al.* Acoustic absorptions of multifunctional polymeric cellular structures based on triply periodic minimal surfaces fabricated by stereolithography[J]. *Virtual and Physical Prototyping*, 2020, 15(2): 242-249
- [45] Wang Y. Periodic surface modeling for computer aided nano design[J]. *Computer-Aided Design*, 2007, 39(3): 179-189
- [46] Yoo D J. Porous scaffold design using the distance field and triply periodic minimal surface models[J]. *Biomaterials*, 2011, 32(31): 7741-7754
- [47] Yoo D J. Advanced porous scaffold design using multi-void triply periodic minimal surface models with high surface area to volume ratios[J]. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 2014, 15(8): 1657-1666
- [48] Zhao Y F, Wei M, Lu J, *et al.* Biotemplated hierarchical nanostructure of layered double hydroxides with improved photocatalysis performance[J]. *ACS Nano*, 2009, 3(12): 4009-4016
- [49] Yang P, Deng T, Zhao D, *et al.* Hierarchically ordered oxides[J]. *Science*, 1998, 282(5397): 2244-2246
- [50] Yoo D. New paradigms in hierarchical porous scaffold design for tissue engineering[J]. *Materials Science and Engineering: C*, 2013, 33(3): 1759-1772
- [51] Feng J W, Fu J Z, Lin Z W, *et al.* Layered infill area generation from triply periodic minimal surfaces for additive manufacturing[J]. *Computer-Aided Design*, 2019, 107: 50-63
- [52] Ding J H, Zou Q, Qu S, *et al.* STL-free design and manufac-

- turing paradigm for high-precision powder bed fusion[J]. *CIRP Annals*, 2021, 70(1): 167-170
- [53] Yoo D J. Heterogeneous porous scaffold design for tissue engineering using triply periodic minimal surfaces[J]. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 2012, 13(4): 527-537
- [54] Chen H W, Guo Y, Rostami R, *et al.* Porous structure design using parameterized hexahedral meshes and triply periodic minimal surfaces[C] // *Proceedings of Computer Graphics International*. New York: Association for Computing Machinery Press, 2018: 117-128
- [55] Wang Qinghui, Xia Gang, Xu Zhijia, *et al.* Modelling the microstructures of cancellous bone based on triply periodic minimal surface for tissue engineering[J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2016, 28(11): 1949-1956(in Chinese)
(王清辉, 夏刚, 徐志佳, 等. 面向组织工程的松质骨微观结构 TPMS 建模方法[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2016, 28(11): 1949-1956)
- [56] Li D W, Dai N, Jiang X T, *et al.* Interior structural optimization based on the density-variable shape modeling of 3D printed objects[J]. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2016, 83(9-12): 1627-1635
- [57] Hu J B, Wang S F, Wang Y, *et al.* A lightweight methodology of 3D printed objects utilizing multi-scale porous structures[J]. *The Visual Computer*, 2019, 35(6-8): 949-959
- [58] Yang N, Quan Z, Zhang D W, *et al.* Multi-morphology transition hybridization CAD design of minimal surface porous structures for use in tissue engineering[J]. *Computer-Aided Design*, 2014, 56: 11-21
- [59] Yoo D J, Kim K H. An advanced multi-morphology porous scaffold design method using volumetric distance field and beta growth function[J]. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 2015, 16(9): 2021-2032
- [60] Wang S F, Zhou L C, Luo Z X, *et al.* Lightweight of artificial bone models utilizing porous structures and 3D printing[J]. *International Journal of Performability Engineering*, 2017, 13(5): 633-642
- [61] Yan X, Rao C, Lu L, *et al.* Strong 3D printing by TPMS injection[J]. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2020, 26(10): 3037-3050
- [62] Hu J B, Wang S F, Li B J, *et al.* Efficient representation and optimization for TPMS-based porous structures[J]. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2022, 28(7): 2615-2627
- [63] Hu C F, Lin H W. Heterogeneous porous scaffold generation using trivariate B-spline solids and triply periodic minimal surfaces[J]. *Graphical Models*, 2021, 115: Article No.101105
- [64] Feng J W, Fu J Z, Shang C, *et al.* Porous scaffold design by solid T-splines and triply periodic minimal surfaces[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, 336: 333-352
- [65] Feng J W, Fu J Z, Shang C, *et al.* Sandwich panel design and performance optimization based on triply periodic minimal surfaces[J]. *Computer-Aided Design*, 2019, 115: 307-322
- [66] Feng J W, Fu J Z, Shang C, *et al.* Efficient generation strategy for hierarchical porous scaffolds with freeform external geometries[J]. *Additive Manufacturing*, 2020, 31: Article No.100943
- [67] Panesar A, Abdi M, Hickman D, *et al.* Strategies for functionally graded lattice structures derived using topology optimization for additive manufacturing[J]. *Additive Manufacturing*, 2018, 19: 81-94
- [68] Brackett D, Ashcroft I, Hague R. Topology optimization for additive manufacturing[C] // *Proceedings of the Solid Freeform Fabrication Symposium*. Austin: ETH-Zürich, 2011, 1: 348-362
- [69] Wang J, Chen W W, Da D C, *et al.* IH-GAN: a conditional generative model for implicit surface-based inverse design of cellular structures[OL]. [2021-09-14]. <https://arxiv.org/abs/2103.02588>
- [70] Du Yixian, Zhang Yue, Fu Junjian, *et al.* Topology optimization design of functionally graded cellular structure with integrated load bearing and heat dissipation[J]. *Journal of Computer-Aided Design and Computer Graphics*, 2021, 33(7): 1141-1150(in Chinese)
(杜义贤, 张跃, 付君健, 等. 承载散热一体化的功能梯度多孔结构拓扑优化设计[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2021, 33(7): 1141-1150)