拓扑优化变密度法的灰度单元分层双重惩罚方法

廉睿超, 敬石开*, 何志军, 史泽芳

(北京理工大学机械与车辆学院 北京 100081)
(jingshikai@bit.edu.cn)

摘 要: 在连续体结构拓扑优化中, 应用敏度过滤法可有效地去除数值不稳定问题, 但易出现优化结构边界灰度扩散现象. 为了获得边界清晰的拓扑结果, 提出一种变密度法的灰度单元分层双重惩罚方法. 该方法通过调节不含敏度过滤的 SIMP 优化算法中的惩罚因子, 对过滤后单元敏度进行修正, 加速中间密度单元向 0 或 1 的离散状态逼近. 为了加快这个过程, 将该方法与分层网格细分策略相结合, 优化从一个粗的有限元网格开始, 利用单元密度等效映射方法将粗网格求解优化问题的结果映射为同一问题具有更细网格的初始输入, 通过减少优化过程中的计算消耗, 在取得具有清晰边界拓扑结构的同时提升优化过程的收敛速率. 采用不同方法求解 MBB 梁, 对最终优化结构中所含的中间密度单元数量和优化所需时间消耗进行对比; 利用不同网格划分下的悬臂梁算例验证该方法的网格依赖性. 结果表明, 结合分层双重惩罚的 SIMP 算法在保留原始求解稳定性的同时, 能获得具有清晰边界的拓扑构型, 并提升收敛速率.

关键词: 拓扑优化; 变密度法; 敏度过滤; 灰度单元; 惩罚因子
中图法分类号: TP11 **DOI:** 10.3724/SP.J.1089.2020.18064

A Hierarchical Double Penalty Method of Gray-Scale Elements for SIMP in Topology Optimization

Lian Ruichao, Jing Shikai*, He Zhijun, and Shi Zefang

(*School of Mechanical Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081)

Abstract: In the topology optimization for continuum structures, the sensitivity filtering methods can effectively eliminate the problem of numerical instability, but it is easy to cause the gray-scale diffusion phenomenon at the boundary of the final optimized structure. In order to obtain a crisp topological configuration, a hierarchical double penalty method of gray-scale elements for SIMP (solid isotropic microstructures with penalization) is proposed. The method applies a penalty factor in the SIMP method without sensitivity filter to modify sensitivity of the element from the standard SIMP method, which accelerates the approximation of the intermediate density units to the discrete state of 0 or 1. To further speed up the process, the method is implemented in a hierarchical mesh subdivision strategy. Starting from a coarse finite element mesh and using the element density equivalent mapping method, the solution with the coarse mesh as a starting input for the same problem but with a refined mesh. By reducing the computational cost of the units in the optimization process, the convergence rate of the optimization process is improved while achieving the distinct topology structure. Different methods are used to solve the MBB beam problem. The number of

收稿日期: 2019-09-09; 修回日期: 2020-04-01. 基金项目: 国家重点研发计划(2017YFB1102804). 廉睿超(1987—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为结构拓扑优化; 敬石开(1975—), 男, 博士, 副教授, 博士生导师, 论文通讯作者, 主要研究方向为复杂产品工程、3D 打印、结构优化设计; 何志军(1995—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为群体决策、产品创新设计; 史泽芳(1995—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为 3D 打印.

intermediate density elements contained in the optimized structures obtained by different methods and their time consumption in the entire optimization process were compared, respectively. The mesh dependency of this method is verified by using cantilever beam examples under different mesh divisions. The results show that the SIMP algorithm combined with hierarchical double penalty obtains a topological configuration with clear boundaries and improves the convergence rate while retaining the stability of the original solution.

Key words: topology optimization; variable density approach; sensitivity filter; intermediate density element; penalty factor

在连续体结构拓扑优化中，通过将单元密度变量非 0 即 1 的离散分布松弛为[0, 1]连续分布，极大地简化了求解过程的复杂性. 目前，常见的连续体结构拓扑优化方法主要有均匀化法[1-2]、变密度法[3]、渐近结构法[4-5]、独立连续映射法[6]和水平集法[7-8]等，其中以密度作为设计变量的变密度法应用最为广泛. 为去除变密度法中介于[0, 1]的密度或灰度单元，使优化解更加逼近离散解，Bendsøe 等[9]提出了一种带有惩罚因子的各向同性材料(solid isotropic microstructures with penalization, SIMP)优化模型. 增加 SIMP 插值模型中的惩罚因子可以有效地去除灰度单元，得到边界清晰的拓扑结构，但同时会引起棋盘格和网格依赖性等问题[10]. 过滤法是解决该类问题常用的有效方法之一[11].

过滤法可以分为敏度过滤法和密度过滤法. 敏度过滤法利用过滤区域内单元敏度的加权平均来修正目标单元的敏度值，由于没有附加多余约束条件、易于实现且过滤半径对应制造上的最小尺寸要求，在各类拓扑优化方法中被广泛应用[12]. 以密度作为设计变量并绘制拓扑结构的 SIMP 法，在使用敏度过滤法进行拓扑优化时，由于加权平均效应，获得的拓扑结构边界往往存在大量的中间密度单元，易造成灰度扩散现象[13]. 为抑制 SIMP 优化结果中产生的边界灰度扩散现象，许多学者开展了相关研究. 基于过滤函数的改进法，Bruns 等[14]和 Sigmund[15]对过滤函数中的密度进行了改进，Wang 等[16]提出双线性过滤函数，Sigmund[17]提出平均权重系数法，Guo 等[18]提出在插值模型中的过滤变量上乘以原始变量，匡兵等[19]提出改进灵敏度的策略法，龙凯等[11]提出考虑密度梯度的敏度过滤法等. 基于密度投影技术，Guest 等[20], Xu 等[21]和 Sigmund[17]提出应用连续参数调节的 Heaviside 法和连续参数调节的图像处理优化方法. 还有中间密度单元的后处理技术，Shamsuddin 等[22]通过参数优化实现拓扑结构后处理，Fu 等[23]通过设定灰度阈值并结合后处理技术来抑制中间密度单元，李伯豪[24]利用变密度法对柔性机构的结果进行了后处理，张志飞等[25]提出双重 SIMP 法并与后处理工艺相结合等.

上述方法在一定程度上对中间密度单元起到了抑制作用，但基于过滤函数的改进法往往存在不稳定性[17]. 相比其他过滤法，应用密度投影技术的连续参数调节法，增加了求解所需的迭代次数，且投影是对密度的转移并非惩罚，不能有效地抑制灰度单元，通常需要结合后处理工艺去除[26]，而在一些案例中，后处理工艺可能会给结构性能带来严重损耗[17]. 为此，本文提出一种灰度单元的分层双重惩罚方法. 该方法通过调节不含敏度过滤的 SIMP 法中的惩罚因子，实现过滤后单元敏度的修正，促使中间密度单元加速向 0 或 1 的离散状态逼近；在此基础上结合分层网格细分策略，将粗网格优化的解作为同一个问题具有更细网格的起始猜测，以减少因初始网格划分细密而增加的设计变量和有限元计算消耗带来的负担，在保留原始 SIMP 方法求解稳定性的同时，有效地抑制了结构边界灰度扩散现象，并加速了收敛过程.

1 SIMP 数值模型

SIMP 法又被称为人造密度法或幂律法，其材料插值模型以密度作为设计变量，假定单元材料弹性模量和密度之间关系满足公式

$$E_i = E_{\min} + l_i^p \left(E_0 - E_{\min}\right) \tag{1}$$

其中，E_i 为第 i 个单元插值后的弹性模量；E_0 和 $E_{\min}$ 分别为固体和空洞部分材料弹性模量；l_i 为第 i 个单元的相对密度，$l_i \in [0, 1]$；p 为惩罚因子.

在体积约束条件下，以最小柔顺度为优化目标，应用式(1) SIMP 插值的拓扑优化数学模型为

$$\begin{cases} \text{find } L = l_i \left(i = 1,2,3,\cdots,N\right) \\ \min\ C\left(L\right) = \boldsymbol{QU} \\ \text{s.t. } \boldsymbol{KU} = \boldsymbol{Q}, \\ \quad V/V_0 - w = \sum_i^N \left(l_i v_i\right)/V_0 - w \leqslant 0, \\ \quad 0 < l_{\min} \leqslant l_i \leqslant 1 \end{cases} \tag{2}$$

其中，C 为结构最小柔顺度，与刚度最大化相一致；L 为单元相对密度；$\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 分别为施加载荷向量和位移向量；$\boldsymbol{K}$ 为总刚度矩阵；V_0 和 V 分别为初始结构体积和优化后结构体积；v_i 为单元体积；w 为体积比；$l_{\min}$ 为设计变量最小值(为防止奇异解的发生，一般取 0.001)；N 为设计区域离散单元总数. 本文采用优化准则(optimality criteria, OC)算法[27]对数值算例进行求解.

2　加速敏度修正方法

2.1　传统敏度过滤

在 SIMP 插值模型中，设 l_m 为设计域内任一单元的密度，由式(2)可得

$$C\left(\boldsymbol{L}\right) = \boldsymbol{QU} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{KU}.$$

$$\boldsymbol{K} = \sum_e \boldsymbol{K}_e = \sum_e E_i \boldsymbol{K}_e^0.$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial l_m} = p_1\left(l_m\right)^{p_1-1}(E_0 - E_{\min})\boldsymbol{K}_e^0 \tag{3}$$

其中，$\boldsymbol{K}_e$ 为单元刚度矩阵；$\boldsymbol{K}_e^0$ 是密度为 1 时的单元刚度矩阵；p_1 为惩罚参数. 目标函数的灵敏度计算公式为

$$\frac{\partial C}{\partial l_m} = \frac{\partial(\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{KU})}{\partial l_m} = \frac{\partial \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}}{\partial l_m}\boldsymbol{KU} + \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial l_m}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial l_m} \tag{4}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial l_m} = \frac{\partial(\boldsymbol{KU})}{\partial l_m} = \frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial l_m}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{K}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial l_m}.$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial l_m} = \boldsymbol{K}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial l_m} - \boldsymbol{K}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial l_m}\boldsymbol{U} \tag{5}$$

将式(3)(5)代入式(4)可得

$$\frac{\partial C}{\partial l_m} = -\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial l_m}\boldsymbol{U} = -p_1\left(l_m\right)^{p_1-1}\boldsymbol{u}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_e^0\boldsymbol{u}_m \tag{6}$$

令 e 为敏度过滤的目标单元，则敏度过滤法的数学表达式[15]为

$$\frac{\widetilde{\partial C}}{\partial l_e} = \left(\sum_{i\in N_e} H_i l_i \frac{\partial C}{\partial l_i}\right) \Bigg/ l_e \sum_{i\in N_e} H_i \tag{7}$$

其中，$\frac{\partial C}{\partial l_i}$ 和 $\frac{\widetilde{\partial C}}{\partial l_e}$ 分别为过滤前和过滤后目标函数的灵敏度；l_e 为单元 e 的相对密度；N_e 为 e 邻域内的单元集合；权重因子函数为

$$H_i = r_{\min} - d(e,i),\ \left\{i\in N_e, \middle| d(e,i) \leqslant r_{\min}\right\}.$$

其中，$d\left(e,i\right)$ 为单元 e 和 i 的空间中心距离；$r_{\min}$ 为过滤半径.

敏度过滤法以中心单元 e 和过滤半径 $r_{\min}$ 确定需要加权的单元，依据邻域内单元中心间距加权平均的方式修正目标函数的敏度信息，进而改变单元 e 的密度值. 敏度值越高，对应的密度值越趋近 1；反之，则趋近于 0. 当某个敏度值较高的单元邻域内存在多个低敏度值单元时，经加权平均后的敏度值变低，相应的密度值也被降低. 因此，通过敏度过滤将使得直接与空单元接触的结构边界区域生成大量的中间密度单元，引起边界灰度扩散现象.

2.2　敏度的双重惩罚

正如上文所述，通过增加不含敏度过滤 SIMP 法中的惩罚因子，可以有效地抑制优化结构中生成的中间密度单元，但易造成棋盘格和网格依赖等数值不稳定问题. 敏度过滤法可去除因惩罚而造成的数值不稳定问题，但通常会引起边界灰度扩散现象. 本文提出灰度单元的双重惩罚方法，其基本思想是结合上述 2 种方式的优势. 首先采用敏度过滤法对结构进行优化，通过加权平均单元敏度信息，有效地避免因局部单元密度高低剧烈交替变化造成的数值不稳定现象；再利用不含敏度过滤的 SIMP 法中惩罚参数对加权平均后敏度信息较小/较大的单元敏度进行弱化/强化，使得单元密度值向 0 和 1 两端加速逼近，其数学表达式为

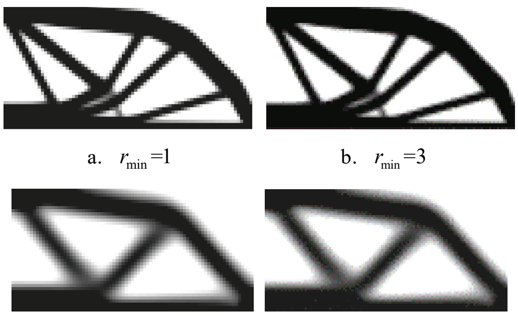
$$\frac{\widehat{\partial C}}{\partial l_e^s} = -p_2\left(l_e^H\right)^{p_2-1}\boldsymbol{u}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_e^0\boldsymbol{u}_e \tag{8}$$

其中，l_e^H 是式(7)敏度过滤后得到的单元密度；p_2 是二次惩罚参数.

在利用本文方法的优化过程中，单元的初始密度为 l_e^0，其原始敏度 $\frac{\partial C}{\partial l_e}$ 可通过调节式(6)中的惩罚参数 p_1 求得；过滤后的单元敏度 $\frac{\widetilde{\partial C}}{\partial l_e}$ 可由式(7)对其邻域内的敏度信息加权平均求解，并获得对应单元的密度值 l_e^H；加权平均效应使结构中存在大量的中间密度单元. 为此，将 l_e^H 代入含有惩罚参数 p_2 的敏度求解式(8)中，通过对过滤后的单元敏度值进行二次惩罚，使得具有低密度单元的

敏度值被进一步弱化; 而具有高密度单元的敏度值被强化, 修正敏度过滤后造成的平均效应, 促使中间密度单元向 0 和 1 两端逼近.

惩罚参数 p_2 作用于敏度过滤后的拓扑结果, 其灰度单元的数量依赖于参数 p_1 和 $r_{\min}$ 的取值. 传统 SIMP 法中通常建议取 $p=3$, 若在本文方法中使 p_2 取值小于或等于 $p_1=3$, 则会因对单元的惩罚力度不足, 导致结构边界依旧存在较多的中间密度单元, 得到的最终优化结构将可能次于或等同于文献[25]中的结果; 若使 p_2 取值大于 $p_1=3$, 一般来说 p_2 越大, 得到的拓扑优化结构边界越清晰, 但由于双重大强度惩罚的作用, 在结构中易再次造成棋盘格和网格依赖等问题. 另外, 过滤半径的取值对优化结果也有较大影响, 其取值过小易出现网格依赖问题, 过大灰度边界扩散现象明显, 如图 1 所示. 惩罚参数 p_1, p_2 和过滤半径 $r_{\min}$ 的取值将在第 3.1.1 节展开讨论.



a. $r_{\min}=1$ b. $r_{\min}=3$ c. $r_{\min}=5$ d. $r_{\min}=7$

图 1 SIMP 法不同过滤半径优化结果

为了衡量优化结果中灰度单元的离散率, 本文采用离散率公式[17]作为评价拓扑优化结果清晰度指标, 其数学表达式为

$$M_{\mathrm{nd}}=\left(\sum_i 4l_i\left(1-l_i\right)/N\right)\times 100\% \tag{9}$$

其中, M_{nd} 表示单元 i 的密度由设定初始值向 0 或 1 两端的偏离程度. 当所有单元密度为设定初始值 0.5 时, M_{nd} 具有最大值 100; 当所有单元密度为非 0 即 1 时, M_{nd} 具有最小值 0, 表示结构完全离散; 其他情况下该值介于 0~100. 式(9)仅反映结构中单元密度的离散情况, 并不能量化存在的灰度单元数量. 为此, 本文提出结构灰度单元量化指标来更加全面地反映拓扑优化结构中灰度单元的相关信息, 数学表达式为

$$G=\left(\sum_{i=1}^{N}\overline{l_i}/N\right)\times 100\% \tag{10}$$

其中, G 表示设计区域内的灰度率; $\overline{l_i}$ 为介于 0~1 的密度单元.

2.3 分层网格细分策略

以单元密度作为设计变量的 SIMP 法, 初始化时网格数量 $n_{elx}\times n_{ely}$ 已被设定, 且在整个过程中不发生变化. 网格划分越细, 用于设计变量和有限元的计算消耗越大, 这将使优化过程变得十分缓慢. 若在优化过程中利用较粗的网格去寻找初始结构拓扑, 然后再将其逐步映射到同一问题但具有更细的网格上进一步优化, 以实现拓扑结构由粗到细和更细网格上的逐步转移, 可有效地节省从起始优化就利用较细网格造成的计算消耗, 加快优化速率. 基于这个动机, 将灰度单元双重惩罚方法在分层网格细分策略上实现. 令 q 为网格细分次数, 当 q=0 时, 表示网格数量为初始设计值 $n_{elx}\times n_{ely}$, 在进行网格细分时, 每个单元被拆分为 4 个节点的 4 个单元, 优化需要解决的问题 P_q 可以被简述为

$$\begin{cases}P_q:\ \min f(x)\\ \mathrm{s.t.}\ x\in\{0,1\}^{n_q}\\ \mathrm{where}\ n_q=4n_q-1\end{cases}.$$

其中, n 为正整数. 每个子问题 P_q 都通过本文方法进行求解, 且获得的优化解被用于构建下一个子问题 P_{q+1} 的起始输入.

在优化过程中实现分层网格细分的关键是细分条件的确定. 本文以优化所得结构中含有的中间密度单元上限作为分层网格细分的约束条件, 结合式(9)(10), 网格细分的条件可以被描述为

$$\begin{cases}F_{\mathrm{c}}\leqslant\beta^n\\ F_{\mathrm{c}}=\left(\omega_1 M_{\mathrm{nd}}+\omega_2 G\right)/2\end{cases} \tag{11}$$

其中, ω_1 和 ω_2 是 2 个权重系数, 在本文中分别取 0.8 和 0.2. 若 F_{c} 小于或等于设定值 β^n (β 是一个小于 1 的数, $n=1, 2,\cdots$ 为网格细分次数), 同时目标函数变化大于 0.01, 则进行网格细分; 否则在原始网格下继续执行优化.

在网格细分策略中, 以粗网格的优化结果作为同一问题拥有更细网格起始输入, 其关键是将相同位置粗网格单元所包含的密度值等效映射到细网格对应的每个单元, 如图 2 所示.

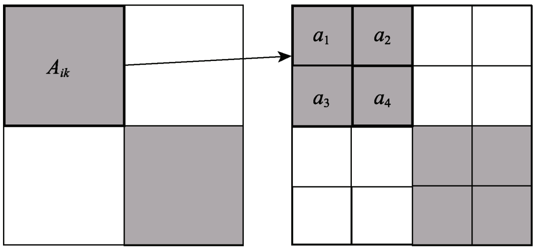


图 2　粗网格到细网格单元密度的等效映射

在图 2 中，设 A 为粗网格 $n_{elx}\times n_{ely}$ 优化所得结果中的第 j 个单元，坐标位置可被表示为 A_{ik}^{j}，令其密度值为 $\rho_A\in[0,1]$，当粗网格 $n_{elx}\times n_{ely}$ 被细化为 $2^n\times n_{elx}\times 2^n\times n_{ely}$ 后，以 $n=1$ 为例，单元 A_{ik}^{j} 被细分成 4 个新 4 节点的单元 a_1,a_2,a_3,a_4．依据单元 A_{ik}^{j} 的位置，细化后 4 个单元的坐标位置和对应的密度值 $\rho_{a_1},\rho_{a_2},\rho_{a_3},\rho_{a_4}$ 可被表示为

$$\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times i-1 & 2\times k-1\\2\times i-1 & 2\times k\\2\times i & 2\times k-1\\2\times i & 2\times k\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\rho_{a_1}\\\rho_{a_2}\\\rho_{a_3}\\\rho_{a_4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\rho_A\\\rho_A\\\rho_A\\\rho_A\end{bmatrix}.$$

3　数值算例分析与验证

采用 MBB(Messerschmitt Bolkow Blohm)梁和悬臂梁算例对本文方法进行验证，其中结构均采用 4 个节点的矩形单元进行离散．算例在 Matlab 2017a 软件环境下编写与实现，若无特殊说明，材料均为各向同性，体积约束为 0.5，弹性模量为 1，泊松比为 0.3，单元边长为 1，SIMP 法中惩罚因子取 3[28]．

3.1　MBB 梁算例

已知图 3 所示设计区域被离散为 $160\times40\times1$ 有限单元，其左端为固定铰支座，右端为可以横向滚动的铰支座，在梁的上边缘中部施加一个垂直方向大小为 1 的载荷，以柔顺度最小为目标．鉴于 MBB 梁结构和载荷的对称性，选取 1/2 模型进行分析与优化计算．

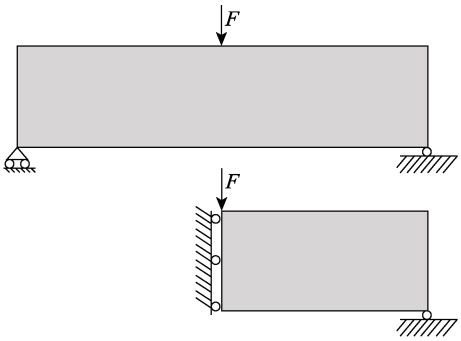


图 3　MBB 梁设计区域

3.1.1　参数选优

以 MBB 梁为例，在 SIMP 法参数取值的基础上，分别对惩罚因子 p_1, p_2 和过滤半径 $r_{\min}$ 进行参数选优．通过正交试验建立如表 1 所示相应的选取体系．对比不同输入参数所得到的拓扑优化结果与数据，分析其取值对结构拓扑优化的影响，并依此对参数进行选优．拓扑优化最终结果及相关数据分别如图 4 和表 2 所示．

表 1　参数正交试验设计

p_1	$r_{\min}$	p_2			
		3	4	5	6
2	3	(1) [2 3 3]	(2) [2 3 4]	(3) [2 3 5]	(4) [2 3 6]
	4	(5) [2 4 3]	(6) [2 4 4]	(7) [2 4 5]	(8) [2 4 6]
	5	(9) [2 5 3]	(10) [2 5 4]	(11) [2 5 5]	(12) [2 5 6]
3	3	(13) [3 3 3]	(14) [3 3 4]	(15) [3 3 5]	(16) [3 3 6]
	4	(17) [3 4 3]	(18) [3 4 4]	(19) [3 4 5]	(20) [3 4 6]
	5	(21) [3 5 3]	(22) [3 5 4]	(23) [3 5 5]	(24) [3 5 6]

表 2　MBB 梁不同参数优化数据

序号	柔顺度	迭代次数	离散率/%	灰度率/%	总时间/s
(1)	77.4	177	5.09	17.46	86.04
(2)	77.5	58	0.79	1.99	28.41
(3)	77.8	59	0.41	0.56	28.90
(4)	78.3	67	0.34	0.69	30.99
(5)	78.3	141	4.89	18.10	67.11
(6)	77.8	88	0.98	2.11	41.80
(7)	78.2	57	0.50	0.81	26.69
(8)	78.8	107	0.36	0.56	51.72
(9)	79.0	174	5.72	20.28	83.75
(10)	78.1	66	1.52	3.82	31.62
(11)	78.6	66	0.50	1.06	31.29
(12)	79.2	57	0.59	1.37	27.08
(13)	79.4	100	5.51	18.40	47.31
(14)	78.1	111	1.93	4.98	52.31
(15)	79.5	98	0.67	1.99	45.60
(16)	79.2	66	0.36	0.81	30.72
(17)	80.0	125	5.13	19.19	61.65
(18)	78.9	110	2.20	5.94	51.81
(19)	79.7	84	1.07	2.79	39.63
(20)	79.6	89	0.48	1.31	41.66
(21)	81.3	165	6.13	21.74	79.42
(22)	79.8	84	2.39	6.58	40.00
(23)	79.8	63	1.13	2.97	29.93
(24)	80.2	65	0.62	1.67	30.82

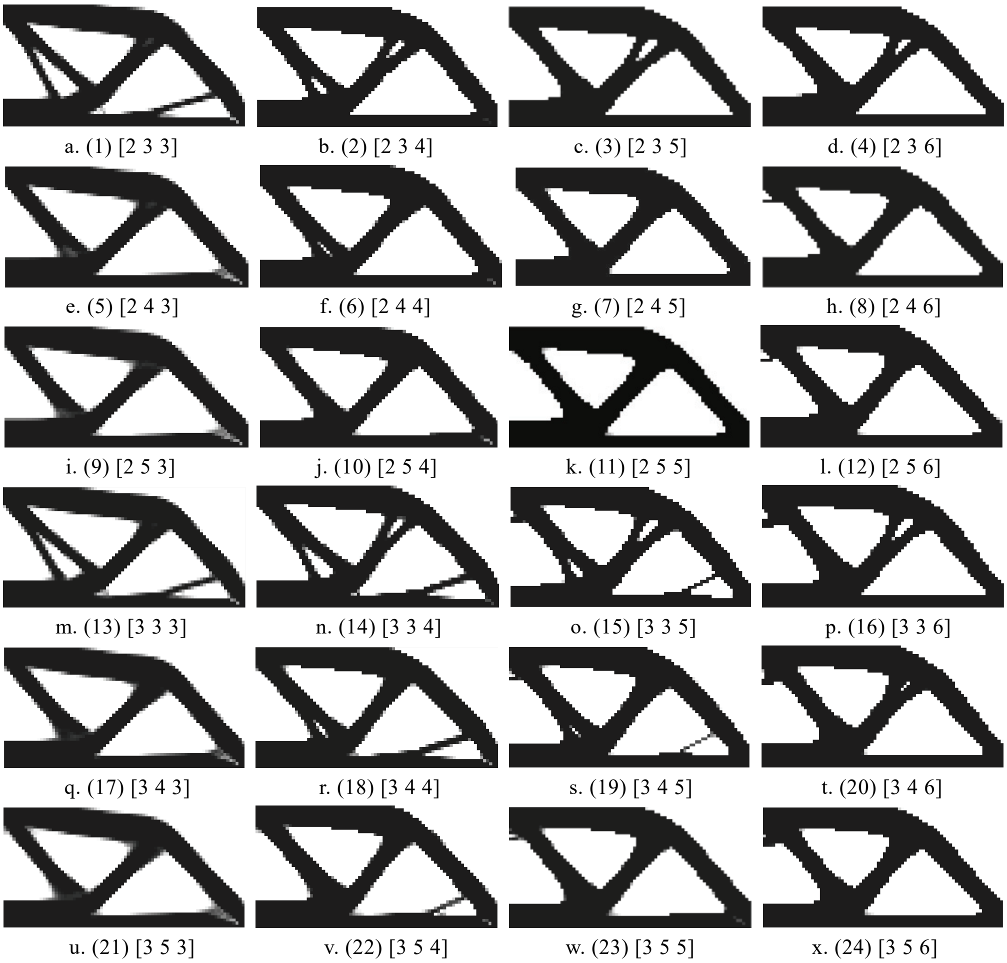


图 4　MBB 梁不同参数优化结果

由图 4 和表 2 中(1)~(4)和(13)~(16)得到的优化结果与数据可知，当 $p_1=2$，$r_{\min}=3$ 时，增加 p_2 可以有效地抑制灰度单元并减少优化所用时间；从图 4 所得优化结果来看，当 $r_{\min}=3$ 时，无论 p_1 和 p_2 如何选取，在最终所得的优化结构内部均存在细小分枝或孔洞区域. 由图 4a, 图 4e, 图 4i, 图 4m, 图 4q, 图 4u 可知，当 p_2 取 SIMP 插值模型建议的惩罚因子 3 时，增加 p_1 对优化结果影响不大，加大 $r_{\min}$ 可消除结构中的细枝，但在最终结构右下角的连接处仍可清晰地看到存在的灰度单元，对应表 2 中较高的离散率，也证明选 $p_2=3$ 并不能有效地抑制结构中的边界灰度扩散现象. 当 $p_2=6$ 时，从图 4d, 图 4h, 图 4l, 图 4p, 图 4t, 图 4x 可以看出，获得的拓扑结构均具有清晰的边界，表 2 对应的离散率在 1%左右波动，说明增加 p_2 可有效地抑制结构中的灰度单元，同时不同的 p_1 和 $r_{\min}$ 取值对优化结果影响不同. 当取 $p_2=4$ 或 5，$p_1=3$ 时，由于优化过程中 p_1 惩罚力度较大，在结构初始构型中形成一些后续优化难以去除的细枝和孔洞结构，通过调节 $r_{\min}$ 也未能有效地解决此类的现象，如图 4r, 图 4s, 图 4v, 图 4w 所示；当取 $p_1=2$ 时，通过调节 $r_{\min}$ 可以得到相对合理的结构拓扑，如图 4g, 图 4j, 图 4k 所示，3 组输入参数得到的最终优化结构相似，且均具有清晰的拓扑边界，但图 4j 的右下角有少许灰度单元，表 2 中(10)的灰度离散率为 1.52%，高于(7)(11). 这可能是因为过滤半径过大而 p_2 值过小所造成；当增大 p_2 后，图 4j 中的灰度单元被有效地抑制，如图 4k 所示；从表 2 中(7)(11)所得优化数据可知，二者对结构中的灰度单元抑制作用非常相近，最终得到的灰度离散率相等，仅为 0.50%，但由于(11)选取的 $r_{\min}$ 稍大，在最终所得灰度率指标和收敛速率上也略次于(7)所得的数据. 综上所述，在使用本文方法时，建议取惩罚因子 $p_1=[1, 2]$，p_2 和 $r_{\min}$ 分别可选取大于传统 SIMP 法优化参数的值.

3.1.2　算例优化结果对比

依据参数选优分析结果，采用不同方法对 1/2 MMB梁的算例进行优化，验证本文方法的有效性.

已知设计区域被离散为 $120\times40\times1$ 的有限元网格，分别取惩罚因子 $p_1=1.2$，$p_2=5.5$，$r_{\min}=4$；结合分层网格细分策略的本文方法，设计域初始被离散为 $30\times10\times1$ 的有限元网格，式(11)中 β=0.6，取起始 $r_{\rm s}=1.5$，因过滤半径的大小依据单元的尺寸确定，当粗网格被细化后单元尺寸变小，需对过滤半径进行适当扩大，以避免半径过小而出现网格依赖现象，每次细分后过滤半径 $r_{\min}=1.64nr_{\rm s}$．本文方法与其他文献中相同案例的优化结果和数据对比如表 3 所示．

表 3　不同方法对 MBB 梁优化结果对比

方法	柔顺度	迭代次数	灰度率/%	离散率/%	总时间/s	优化结果
SIMP	210.0	90	54.15	20.46	118.31	
文献[17](Close-open)	196.2	444	2.45	2.31	463.15	
文献[17](Open-close)	196.2	439	2.61	2.50	457.32	
文献[11]	193.8	57	0.46	0.37	107.61	
文献[20](Heaviside)	189.8	526	0.31	0.29	542.48	
文献[25]	194.0	1010	17.08	5.18	1843.17	
本文	194.5	65	0.39	0.26	112.91	
本文+细分	192.4	53	0.51	0.35	96.53	

由表 3 可知，文献[25]提出的优化方法出现了求解不稳定性问题，与 SIMP 优化结果相比，其结构内部存在细枝且对灰度单元抑制效果不理想，最终所得的离散率和灰度率分别为 5.18%和 17.08%，在其最终获得拓扑构型中可以清晰观察到结构内部存在的中间密度单元，同时收敛速率相对较慢．除文献[25]外，其余方法获取的最终结果与 SIMP 法的基本相同，均对灰度边界扩散现象起到较好的抑制作用，得到了清晰的拓扑结果．文献[17,20]所提出的 Open-close 法或 Close-open 法和 Heaviside 法均采用了连续参数调节技术，通过在一定迭代步数下调节参数值来转移中间密度单元，这将不可避免地增加对迭代次数的需求，且文献[20]所得的优化结构中出现一些微小的孔洞区域，说明其在该算例的优化中存在一定的不稳定性．从表 3 中所得的对比数据来看，文献[20,11]与本文方法所获得的最终离散率均在 0.3%左右浮动，表现出对灰度单元较强的抑制作用，但文献[20]所需的迭代次数和时间消耗远大于文献[11]和本文方法．相比文献[11]的方法，本文结合网格细分策略的方法在迭代次数和收敛时间上体现出了一定的优势，分别仅需 53 次迭代和 96.53 s，且获得了较低的目标函数值；与不含网格细分策略的本文方法相比，由于优化从粗网格到细网格的变化，有效地降低了过程所需的计算消耗，但其灰度率和离散率都要略高于不含网格细分策略的方法，这可能是由于优化过程中过滤半径变化引起的．综上，通过表 3 优化结果与数据对比分析表明，本文方法在抑制灰度边界扩散现象和提升收敛速率上都体现了一定的优势．

3.2　悬臂梁算例

由于惩罚因子 p_2 作用于 SIMP 法的优化结果，可能会重新引入网格依赖性问题．为考察本文方法的网格依赖性问题，采用不同网格离散下的悬壁梁进行验证．如图 5 所示，已知设计域左端被固定，右端中部被施加一个垂直方向大小为 1 的载荷．分

别对不同网格划分的设计域进行优化，取 $p_1=2$， $p_2=5$，拓扑优化结果及相关数据如图6所示.

图5　悬壁梁设计区域

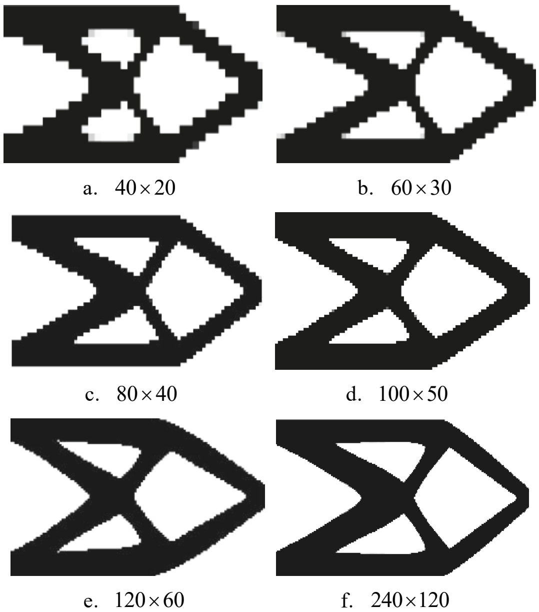


图6　不同网格离散下的优化结果

由图6可知，利用本文方法对不同网格离散下悬壁梁进行优化，获得的最终拓扑构型基本相同，随着网格的逐步细密，结构的边界也越来越光滑，且均具有清晰的结构边界，未出现网格依赖等数值不稳定现象.

4　结　语

在连续体结构拓扑优化中，为了在获得清晰的结构边界同时提升优化收敛速率，本文提出一种灰度单元分层双重惩罚方法. 通过调节无敏度过滤的SIMP法中密度惩罚因子来修正经过滤后的单元敏度值，促使中间密度单元向0或1的离散状态逼近，并结合分层网格细分策略将同一个优化问题分解成从粗网格到细网格的子问题求解过程，利用粗网格所得的优化解作为同一问题但具有更细网格的起始输入. 在保留原始SIMP方法求解稳定性的同时，有效地抑制了结构边界灰度扩散现象，并加速了收敛过程. 以MBB梁算例为基础，利用正交试验对本文方法中的惩罚因子和过滤半径进行选优，并结合参数的建议取值与其他优化方法的结果进行了对比分析. 算例结果验证了本文方法的可行性与有效性. 但是，对于不同的数值算例，参数的选取仍存在一定的局限性，如何在此基础上实现自动化的参数选优，将是下一步研究工作的重点.

参考文献(References):

[1] Suzuki K, Kikuchi N. A homogenization method for shape and topology optimization[J]. Computer Mechanics and Engineering, 1991, 93(3): 291-318

[2] Díaz A R, Bendsøe M P. Shape optimization of structures for multiple loading conditions using a homogenization method[J]. Structural Optimization, 1992, 4(1): 17-22

[3] Rietz A. Sufficiency of a finite exponent in SIMP (power law) methods[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2001, 21: 159-163

[4] Querin O M, Steven G P, Xie Y M. Evolutionary structural optimization using an additive algorithm[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2000, 34(3/4): 291-308

[5] Querin O M, Young V, Steven G P, *et al*. Computational efficiency and validation of bi-directional evolutionary structural optimization[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2000, 189(2): 559-573

[6] Sui Yunkang, Yang Deqing, Wang Bei. Topology optimization of continuum structures under multi-case stress and displacement constraints[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2000, 32(2): 171-179(in Chinese)
(隋允康，杨德庆，王备. 多工况应力和位移约束下连续体结构拓扑优化[J]. 力学学报, 2000, 32(2): 171-179)

[7] Sethian J A, Wiegmann A. Structural boundary design via level set and immersed interface methods[J]. Journal of Computational Physics, 2000, 163(2): 489-528

[8] Wu Yifan, Zheng Bailin, He Lyuyang, *et al*. Equivalent conversion method of gray-scale elements for SIMP in structures topology optimization[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2017, 29(4): 759-767(in Chinese)
(吴一帆，郑百林，何旅洋，等. 结构拓扑优化变密度法的灰度单元等效转换方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2017, 29(4): 759-767)

[9] Bendsøe M P, Sigmund O. Topology optimization: theory, methods, and applications[M]. 2nd ed. Heidelberg: Springer, 2013

[10] Sigmund O, Petersson J. Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima[J]. Structural Optimization, 1998, 16(1): 68-75

(下转第1227页)