三点插值的三次 PH 曲线构造方法

方林聪[1)], 李毓君[2)*]

[1)] (浙江财经大学信息管理与人工智能学院 杭州 310018)
[2)] (浙江财经大学东方学院 海宁 314408)
(yujunli1110@gmail.com)

摘 要: 为推广三次 PH 曲线的实际应用, 研究在给定 3 个平面型值点条件下的三次 PH 曲线构造方法. 三次 PH 曲线具有鲜明的几何性质和代数特征, 采用平面参数曲线的复数表示方法, 三次 PH 曲线的充分必要条件被表述为复代数系统. 通过对给定型值点进行参数化, 将复代数系统转化为一元二次复方程, 求解方程即得三次 PH 曲线的控制顶点, 从而得到 2 条构造曲线. 应用该方法对模拟给定的若干平面型值点数据进行实验, 比较了均匀参数化、弦长参数化、弧长参数化方法的不同效果, 并计算弧长、弯曲能量、绝对旋转数来选取最优构造曲线. 实验结果表明, 该方法有效且易于计算, 可应用于三次 PH 样条构造.

关键词: Bézier 曲线; 参数化; 插值; 三次 PH 曲线; 等距线
中图法分类号: TP391.41 **DOI:** 10.3724/SP.J.1089.2020.17806

Construction of Cubic PH Curves Interpolating Three Points

Fang Lincong[1)] and Li Yujun[2)*]

[1)] (*School of Information and Artificial Intelligence, Zhejiang University of Finance and Economics, Hangzhou* 310018)
[2)] (*Zhejiang University of Finance & Economics Dongfang College, Haining* 314408)

Abstract: This paper introduces a novel method to construct cubic PH curves by interpolating three planar points, which broadens their practical applications. Since these curves possess prominent geometric characteristics and algebraic properties, their necessary and sufficient conditions can be expressed by a complex system by employing complex representation of planar parametric curves. Following parametrization of given points, we get a quadratic complex equation from the complex system, which gives the control points of two cubic PH curves. We do experiments by constructing cubic PH curves for some given planar points. We compare different parametrization methods including uniform parametrization, chord length, and arc-length parametrization methods. In order to select the best solution, we further compute arc lengths, bending energies, and absolute rotation numbers of curves. Finally, as an application we use the proposed method to construct a cubic PH spline curve.

Key words: Bézier curve; parametrization; interpolation; cubic PH; offset curve

曲线的等距曲线在 CAD 中有着广泛的应用, 如路桥设计、加工路径规划及数控机器等. CAD 系统中主要的造型工具是多项式曲线曲面, 它们天然具有 Bézier 控制多边形, 给设计者进行交互造型带来了极大的便利. 此外, Bézier 控制多边形具有凸包性、几何不变性、变差缩减等优良的几何性质, 成为多项式曲线曲面的几何计算高效算法的基础.

然而, 多项式曲线的单位法向量在计算时包

收稿日期: 2019-03-28; 修回日期: 2019-09-16. **基金项目**: 浙江省自然科学基金(LY18F020023). **方林聪**(1982—), 男, 博士, 副教授, 硕士生导师, CCF 会员, 主要研究方向为计算机辅助几何设计、计算机图形学; **李毓君**(1992—), 女, 硕士, 讲师, 论文通讯作者, 主要研究方向为计算机辅助设计、数据科学.

含求根运算，导致其等距曲线通常不具有有理形式，于是许多等距线的逼近算法被不断提出. 当参数曲线的一阶导数满足 Pythagorean 条件，即其一阶导数的欧氏范数为一个实多项式时，该曲线的等距线自然可以表示为有理多项式形式，这类曲线即称为 Pythagorean-Hodograph (PH)曲线[1-2]. 由于 PH 曲线的这种特殊性质，使得曲线的弧长、曲率等几何量可被精确计算，而无须使用数值积分运算. 它们的等距曲线在 CAD 系统中也可被精确表示，因此 PH 曲线及其等距曲线可被现有 CAD 系统很好地兼容. 因此，PH 曲线的应用可以有效地提升几何计算中的算法效率[3]，并为各种实际应用提供良好的解决方案，特别是传统数控加工中的切、削、磨的刀具路径规划等.

作为一类特殊的多项式参数曲线，PH 曲线的判别方法得到了深入的研究，即给定一个多项式曲线及其 Bézier 控制多边形，有效地判断该曲线是否为 PH 曲线，这个问题在逆向工程中有着重要的应用[4]. 三次 PH 曲线的几何判别方法早在 PH 曲线被提出时就已给出，Farouki 等[1]指出，若三次 PH 曲线的控制多边形满足 2 个内角相等，且第 2 条边是首末 2 条边的等比中项，则该曲线为三次 PH 曲线. Wang 等[5]采用平面曲线的复数表示方法，给出了四次 PH 曲线的几何判别方法；之后它被应用于五次、六次和七次 PH 曲线几何特征研究中[6-8]. Farouki 等[4]从代数学的角度对 PH 曲线的充分必要条件进行了深入的研究，提出了一种 PH 曲线的代数判别方法，并给出了其在数控实际应用中的可靠计算精度范围.

PH 曲线的构造方法取得了一定的进展，为使用者对 PH 曲线进行交互设计提供了有效工具. 目前, PH 曲线的 Hermite 插值问题已有许多的研究成果. 针对五次 PH 曲线的 C^1 插值问题, Farouki 等[9]指出对于任意给定的 C^1 端点条件，总存在 4 个可行解，即可以构造 4 条符合条件的五次 PH 曲线. 通过对 4 个可行解的曲线形状的讨论，Moon 等[10]提出了选取最优解的标准与方法. 雍俊海等[11]则给出了五次 PH 曲线的 C^1 Hermite 插值问题的一种几何求解方法. Meek 等[12]指出给定 G^1 连续的端点约束条件，存在 2 条符合条件的三次 PH 曲线，并给出了相应的构造方法, Byrtus 等[13]在此基础上深入分析了插值解的数量与质量. 七次 PH 曲线可满足更高连续阶的端点约束条件，Jüttler[14]提出了一类正则七次 PH 曲线在 $G^2[C^1]$端点条件下的构造方法，并应用七次 PH 曲线对任意给定曲线进行逼近. 对于特殊的 PH 曲线的 C^1 Hermite 插值方法, Kong 等[15]采用曲线的复数表示，讨论了 PH 曲线的导矢曲线零点在复数域中分布情况. 考虑在数控加工中经常出现的直角过渡曲线设计问题，Farouki[16]研究了奇数次 PH 曲线在 G^2 连续的端点约束条件下的构造方法. 此外，偶数次的 PH 曲线也可以被很好地应用于曲线构造, Wang 等[5]给出了四次 PH 曲线 G^1 条件下的几何构造方法，方林聪等[17]和王慧等[18]分别讨论了六次 PH 曲线在 C^1 和 G^2 端点条件下的构造方法以及圆弧的逼近问题. 此外, PH 曲线的相关理论被推广至高维曲线[19-20]和有理曲线[21-22]. 更多的内容以及实例可以参考文献[2,23-24]及其中的参考文献. 总之, PH 曲线 Hermite 插值方法的研究成果比较丰富，然而 PH 曲线三点插值以及 PH 样条构造的方法尚未被深入研究.

在几何造型中，数据插值的应用非常广泛，设计者希望通过给定型值点，构造相应的几何模型. 本文关注三次 PH 曲线的插值构造方法，并以 PH 曲线的代数充要条件为基础，提出了三次 PH 曲线的插值构造方法，同时讨论了均匀参数化、弦长参数化、弧长参数化方法在插值效果上的差异；然后，通过比较曲线的弧长、弯曲能量、绝对旋转数等几何量来选择最优曲线；最后，讨论该方法在三次 PH 样条构造中的应用，以使该类曲线在几何造型中可以构造更加丰富的几何模型.

1 三次 PH 曲线

一条平面参数曲线 $\boldsymbol{P}(t)=(x(t),y(t))$，$t\in[0,1]$，其距离为 d 的等距曲线为 $\boldsymbol{P}_d(t)=\boldsymbol{P}(t)+d\cdot\boldsymbol{n}(t)$. 其中，$\boldsymbol{n}(t)=\dfrac{(y'(t),-x'(t))}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}$ 为 $\boldsymbol{P}(t)$ 的单位法向量；d 为有向距离.

定义 1. 一条平面多项式曲线 $\boldsymbol{P}(t)=(x(t),y(t))$，若存在一个实多项式 $\sigma(t)$，使得其一阶导数 $\boldsymbol{P}'(t)=(x'(t),y'(t))$ 满足 $x'^2(t)+y'^2(t)=\sigma^2(t)$，则称该曲线为一条平面 PH 曲线.

记 i=$\sqrt{-1}$ 为虚数单位，$\|\cdot\|$ 表示复数的模. 在复平面 $\mathbb{C}$ 中考虑参数曲线 $\boldsymbol{P}(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$，则可以得到平面 PH 曲线的一个充分必要条件定理 1.

定理 1[5]. 一条平面参数曲线是 PH 曲线当且仅当其一阶导数，有形式为 $\boldsymbol{P}'(t)=w(t)[u(t)+\mathrm{i}v(t)]^2$

的因式分解. 其中, $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ 为实多项式, 且 $u(t)$ 和 $v(t)$ 互素.

若三次平面参数曲线 $\boldsymbol{P}(t)$ 为 PH 曲线, 则有 $w(t)\equiv 1$, 且 $u(t)$ 和 $v(t)$ 均为一次实多项式. 因此三次 PH 曲线的一阶导数为 $\boldsymbol{P}'(t)=[z_0(1-t)+z_1t]^2$. 其中, $z_0(t)$, $z_1(t)\in\mathbb{C}$, $z_0\neq kz_1,\forall k\in\mathbb{R}$.

另一方面, 由 Bézier 曲线的求导公式得到 $\boldsymbol{P}'(t)=3\sum_{i=0}^{2}B_i^2(t)\Delta\boldsymbol{P}_i$. 其中 $\Delta\boldsymbol{P}_i=\boldsymbol{P}_{i+1}-\boldsymbol{P}_i$, i=0,1,2. 于是有

$$\begin{cases}3\Delta\boldsymbol{P}_0=z_0^2\\3\Delta\boldsymbol{P}_1=z_0z_1\\3\Delta\boldsymbol{P}_2=z_1^2\end{cases}\tag{1}$$

因此不难得到定理 2.

定理 2[1]. 若 $\boldsymbol{P}_i$ $(i=0,\cdots,3)$ 是一条平面三次 Bézier 曲线 $\boldsymbol{P}(t)$ 的控制顶点, $L_i=\|\Delta\boldsymbol{P}_i\|$ 为其控制多边形第 i 条边的边长, θ_1 和 θ_2 为图 1 所示控制多边形的 2 个内角, 则 $\boldsymbol{P}(t)$ 是 PH 曲线当且仅当

$$\begin{cases}L_1^2=L_0L_2\\\theta_1=\theta_2\end{cases}.$$

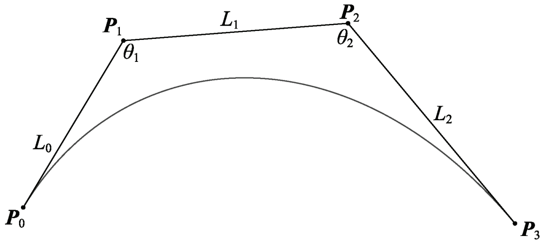


图 1　三次 PH 曲线的 Bézier 控制多边形

2　三点插值方法

考虑给定平面上 3 个型值点 $\boldsymbol{Q}_0$, $\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{Q}_2$; 要求构造一条三次 PH 曲线 $\boldsymbol{P}(t)$, $t\in[0,1]$, 插值这些数据点; 其中有 $\boldsymbol{P}(0)=\boldsymbol{Q}_0$, $\boldsymbol{P}(1)=\boldsymbol{Q}_2$. 记 $\boldsymbol{Q}_1$ 点的参数值为 t_1, 即 $\boldsymbol{P}(t_1)=\boldsymbol{Q}_1$. 这里 t_1 可由 3 种方法计算得到:

(1) 均匀参数化方法. 记 t_1=0.5.

(2) 弦长参数化方法. 记

$$t_1=\frac{\|\boldsymbol{Q}_1-\boldsymbol{Q}_0\|}{\|\boldsymbol{Q}_1-\boldsymbol{Q}_0\|+\|\boldsymbol{Q}_2-\boldsymbol{Q}_1\|}.$$

(3) 弧长参数化方法. 由点 $\boldsymbol{Q}_0$, $\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{Q}_2$ 确定一个圆, 得到以 $\boldsymbol{Q}_0$ 和 $\boldsymbol{Q}_2$ 为端点且经过 $\boldsymbol{Q}_1$ 的圆弧, $\boldsymbol{Q}_1$ 分该圆弧为 2 段, 弧长分别记为 r_0 和 r_1; 于是, 可令 $t_1=\dfrac{r_0}{r_0+r_1}$.

特别地, 当 $\boldsymbol{Q}_1$ 落在线段 $\boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{Q}_2$ 的垂直平分线上时, 上述 3 种参数化方法是等价的, 都有 t_1=0.5.

定理 3. 给定平面上的 3 个点 $\boldsymbol{Q}_0$, $\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{Q}_2$, 则存在不多于 2 条以 $\boldsymbol{Q}_0$ 和 $\boldsymbol{Q}_2$ 为端点, 且经过 $\boldsymbol{Q}_1$ 点的三次 PH 曲线.

证明. 通过积分可计算

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{P}(t)=\int\boldsymbol{P}'(t)\mathrm{d}t=\\&\int[z_0(1-t)+z_1t]^2\,\mathrm{d}t=\\&-\frac{1}{3}z_0^2(1-t)^3+z_0z_1t^2-\frac{2}{3}z_0z_1t^3+\frac{1}{3}z_1^2t^3+\boldsymbol{Z}\end{aligned}\tag{2}$$

这里 $\boldsymbol{Z}$ 为复常量. 由于已知 $\boldsymbol{P}(0)=\boldsymbol{Q}_0$, $\boldsymbol{P}(t_1)=\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{P}(1)=\boldsymbol{Q}_2$, 代入式(2)可以得到复方程组

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{3}z_0^2+\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Q}_0\\-\dfrac{1}{3}z_0^2(1-t_1)^3+z_0z_1t_1^2-\dfrac{2}{3}z_0z_1t_1^3+\dfrac{1}{3}z_1^2t_1^3+\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Q}_1\\\dfrac{1}{3}z_0z_1+\dfrac{1}{3}z_1^2+\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Q}_2\end{cases}.$$

将 z_0^2, z_0z_1, z_1^2 作为未知数, 求解得到

$$\begin{cases}z_0^2=3(\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Q}_0)\\z_0z_1=\dfrac{((1-t_1)^3+t_1^3-1)\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{Q}_1-(1-t_1)^3\boldsymbol{Q}_0-\boldsymbol{Q}_2t_1^3}{t_1^2-t_1^3}\\z_1^2=3(\boldsymbol{Q}_2-\boldsymbol{Z})-\\\qquad\dfrac{(\boldsymbol{Q}_1-\boldsymbol{Z})+(\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Q}_0)(1-t_1)^3+(\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Q}_2)t_1^3}{t_1^2-t_1^3}\end{cases}\tag{3}$$

进一步, 将式(3)代入 $(z_0z_1)^2=z_0^2z_1^2$, 得到关于 $\boldsymbol{Z}$ 的一个一元二次复方程

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{Z}^2+\boldsymbol{b}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{c}=0\tag{4}$$

其中,

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}=-9t_1^6+27t_1^5-36t_1^4+27t_1^3-9t_1^2\\\boldsymbol{b}=6(2\boldsymbol{Q}_0+\boldsymbol{Q}_2)t_1^6-9(5\boldsymbol{Q}_0+\boldsymbol{Q}_2)t_1^5+\\\quad 3(23\boldsymbol{Q}_0+\boldsymbol{Q}_2)t_1^4+3(\boldsymbol{Q}_1-19\boldsymbol{Q}_0)t_1^3-\\\quad 9(\boldsymbol{Q}_1-3\boldsymbol{Q}_0)t_1^2+6(\boldsymbol{Q}_1-\boldsymbol{Q}_0)t_1\\\boldsymbol{c}=-4(\boldsymbol{Q}_0^2+\boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{Q}_2+\boldsymbol{Q}_2^2)t_1^6+9\boldsymbol{Q}_0(2\boldsymbol{Q}_0+\boldsymbol{Q}_2)t_1^5-\\\quad 3\boldsymbol{Q}_0(11\boldsymbol{Q}_0+\boldsymbol{Q}_2)t_1^4+\\\quad(32\boldsymbol{Q}_0^2-5\boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{Q}_1+2\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2-2\boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{Q}_2)t_1^3+\\\quad 9\boldsymbol{Q}_0(\boldsymbol{Q}_1-2\boldsymbol{Q}_0)t_1^2-6\boldsymbol{Q}_0(\boldsymbol{Q}_1-\boldsymbol{Q}_0)t_1-\\\quad(\boldsymbol{Q}_1-\boldsymbol{Q}_0)^2\end{cases}.$$

由代数基本定理知, 该方程存在 2 个复根, 因此满足插值条件的三次 PH 曲线不超过 2 条.　　证毕.

因此, 当给定平面点 $\boldsymbol{Q}_0$, $\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{Q}_2$ 时, 则得到控制顶点 $\boldsymbol{P}_i$ $(i=0,1,2,3)$ 算法如下:

输入. 复数表示的 3 个型值点 $\boldsymbol{Q}_0$，$\boldsymbol{Q}_1$，$\boldsymbol{Q}_2$.

输出. 复数表示的控制顶点 $\boldsymbol{P}_i\ (i=0,1,2,3)$.

Step1. 确定 $\boldsymbol{Q}_1$ 的参数值 t_1, 由弦长参数化方法得到 $t_1=\dfrac{\|\boldsymbol{Q}_1-\boldsymbol{Q}_0\|}{\|\boldsymbol{Q}_1-\boldsymbol{Q}_0\|+\|\boldsymbol{Q}_2-\boldsymbol{Q}_1\|}$.

Step2. 计算 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, 以构造式(4).

Step3. 求解式(4)得到 $\boldsymbol{Z}$.

Step4. 将 $\boldsymbol{Z}$ 代入式(3)得到 z_0^2，z_0z_1，z_1^2.

Step5. 将 z_0^2，z_0z_1，z_1^2 代入式(1)时，得到 $\boldsymbol{P}_0=\boldsymbol{Q}_0$, $\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{Q}_0+\dfrac{z_0^2}{3}$，$\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{Q}_2-\dfrac{z_1^2}{3}$, $\boldsymbol{P}_3=\boldsymbol{Q}_2$.

3　数值实例与应用

本节给出三次 PH 曲线三点插值构造的实例，注意到参数化方法会影响插值效果，因此比较了均匀参数化、弦长参数化、弧长参数化方法的不同效果，以及曲线的弧长、弯曲能量、旋转数等，如表 1 所示，为选取最优曲线提供参考. 为比较不同参数化方法，本文计算了弧长 S、弯曲能量 E、绝对旋转数 R_{abs} 等曲线度量. 令 k 为曲线的曲率，则它们的计算方法分别为

$$S=\int \mathrm{d}s=\int_0^1\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t\ ,$$

$$E=\int k^2\mathrm{d}s=\int_0^1 k^2\left\|P'(t)\right\|\mathrm{d}t\ ,$$

$$R_{\text{abs}}=\frac{1}{2\pi}\int|k|\,\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi}\int_0^1|k|\left\|P'(t)\right\|\mathrm{d}t\ .$$

实例 1~实例 4 分别对表 1 所示数据进行了实验.

表 1　实验数据

实例	插值数据
1	(0,0), (2,3), (6,0)
2	(0,0), (8,0), (6,0)
3	(0,0), (4,0), (6,0)
4	(0,0), (6,0), (6,0)

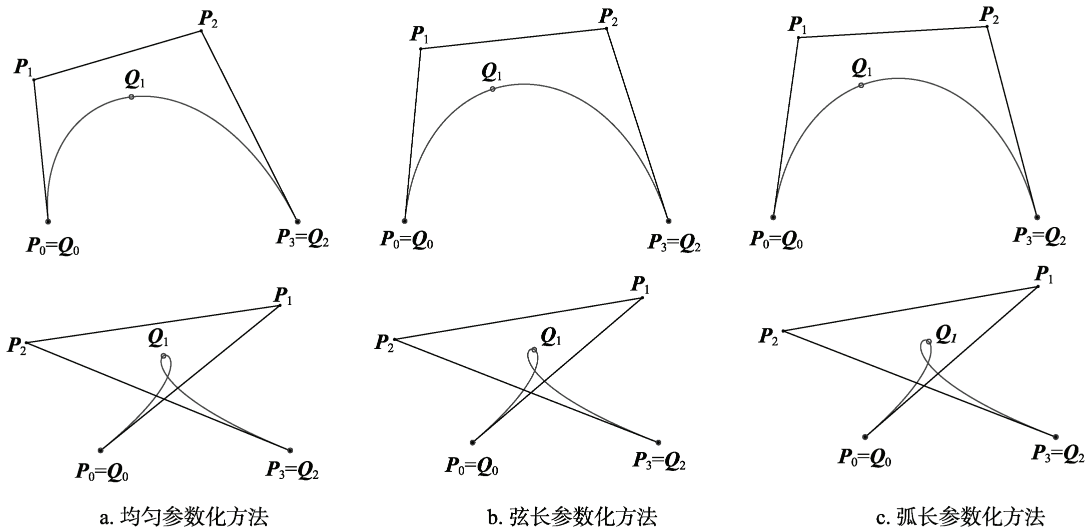
表 2 给出了实例 1 的曲线构造过程中的数值计算结果，包括式(4)的 2 个数值解. 表 3 比较了 3 种参数化方法得到的曲线的弧长、弯曲能量和绝对旋转数. 在实例 1 中，每种方法得到 2 条解曲线，其中一条如图 2 所示自交的曲线，具有较大的弯曲能量和绝对旋转数，最小弯曲能量和绝对旋转数通常

表 2　实例 1 的 3 种参数化方法的数值计算结果

方法	t_1	a	b	c	解 1	解 2
均匀参数化	0.5000	−0.4219	2.2500+3.3750i	7.4375−7.5000i	−0.3480+3.4103i	5.6814+4.5897i
弦长参数化	0.4190	−0.4035	2.3615+3.4639i	6.5704−9.3522i	0.3637+3.9132i	5.4887+4.6711i
弧长参数化	0.3957	−0.3915	2.3574+3.4526i	6.3487−9.7698i	0.5722+4.0823i	5.4484+4.7355i

表 3　实例 1 的 3 种参数化方法比较

方法	解 1			解 2		
	弧长	弯曲能量	绝对旋转数	弧长	弯曲能量	绝对旋转数
均匀参数化	9.3343	0.9562	0.4417	9.3343	20.4811	0.8301
弦长参数化	9.3830	0.8803	0.4357	9.3830	19.9345	0.8285
弧长参数化	9.4484	0.8757	0.4370	9.4484	19.3774	0.8271



a. 均匀参数化方法　　b. 弦长参数化方法　　c. 弧长参数化方法

图 2　3 种参数化方法对实例 1 得到的三次 PH 曲线比较

作为最优解选取的一个标准，这种最优构造曲线的选取通常可以有效地避免自交曲线[11,18]. 不同的参数化方法对构造的曲线形状影响不是十分明显.

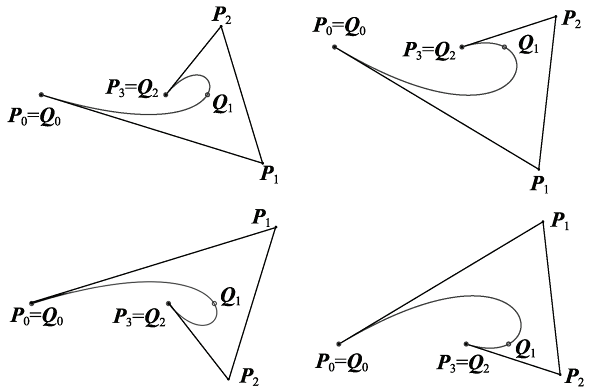
表 4 给出了图 3 所示实例 2 曲线构造过程中的数值计算结果. 表 5 比较了 3 种参数化方法得到的曲线的弧长、弯曲能量和绝对旋转数. 实例 2 中由于无法构造满足条件的圆弧，因此弧长参数化方法不能得到符合条件的三次 PH 曲线；均匀参数化方法和弦长参数化方法分别得到 2 条对称的三次 PH 曲线，所得曲线是关于 x 轴对称的. 由于每一种参数化方法得到的解曲线都是对称的，因此其弧长、弯曲能量和绝对旋转数也都相同.

表 4　实例 2 的不同参数化方法的数值计算结果

方法	t_1	a	b	c	解 1	解 2
均匀参数化	0.5000	−0.4219	9.0000	−52.5625	10.666 7−3.288 6i	10.666 7+3.288 6i
弦长参数化	0.8000	−0.1935	3.7233	−24.2852	9.619 0−5.740 7i	9.619 0+5.740 7i
弧长参数化						

表 5　实例 2 的不同参数化方法比较

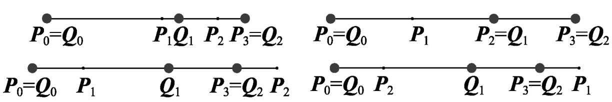
方法	解 1			解 2		
	弧长	弯曲能量	绝对旋转数	弧长	弯曲能量	绝对旋转数
均匀参数化	11.5470	4.4727	0.6892	11.5470	4.4727	0.6892
弦长参数化	12.8749	2.5595	0.6355	12.8749	2.5595	0.6355
弧长参数化						



a. 均匀参数化方法　　b. 弦长参数化方法

图 3　2 种参数化方法对实例 2 得到的三次 PH 曲线比较

表 6 给出了图 4 所示实例 3 曲线构造过程中的数值计算结果. 表 7 比较了 3 种参数化方法得到的曲线的弧长、弯曲能量和绝对旋转数. 实例 3 中 3 个数据点同样是共线的，弧长参数化方法无法构造符合条件的三次 PH 曲线. 此时均匀参数化方法和弦长参数化方法都得到退化的三次 PH 曲线，即为图 4 所示的直线段. 由于得到的曲线是直线段，其弯曲能量和绝对旋转数都为 0.



a. 均匀参数化方法　　b. 弦长参数化方法

图 4　2 种参数化方法对实例 3 得到的三次 PH 曲线比较

表 8 给出了实例 4 的曲线构造过程中的数值计算结果. 表 9 比较了 3 种参数化方法得到的曲线的弧长、弯曲能量和绝对旋转数. 实例 4 中有 2 个数据点是重合的，此时弦长参数化和弧长参数化方法都会导致式(3)退化，无法求解得到构造曲线，因此这里采用均匀参数化方法，所得曲线如图 5 所示对称的 2 条曲线，其弯曲能量和绝对旋转数相同.

表 6　实例 3 不同参数化方法的数值计算结果

方法	t_1	a	b	c	解 1	解 2
均匀参数化	0.5000	−0.4219	4.5000	−10.5625	3.4874	7.1792
弦长参数化	0.6667	−0.3457	3.1605	−4.9383	2.0000	7.1429
弧长参数化						

表 7　实例 3 的不同参数化方法比较

方法	解 1			解 2		
	弧长	弯曲能量	绝对旋转数	弧长	弯曲能量	绝对旋转数
均匀参数化	6.0000	0.0000	0.0000	17.3836	0.0000	0.0000
弦长参数化	6.0000	0.0000	0.0000	17.4286	0.0000	0.0000
弧长参数化						

本文方法可进一步应用于三次 PH 样条的构造. 如图 6 所示, 给定平面数据点(0, 0), (3, 1), (6, 0)和(0, −2), (3, −3), (6, −2). 首先用本文方法构造分别插值 2 组数据的三次 PH 曲线, 并选用弧长参数化方法且取弯曲能量最小的曲线为插值曲线[11]; 然后采用 G^1 连续的端点条件构造了两侧的三次 PH 曲线[13], 从而得到了一条封闭的 G^1 连续的三次 PH 样条曲线. 图 6b 所示为该曲线的等距曲线.

表 8　实例 4 的不同参数化方法的数值计算结果

方法	t_1	a	b	c	解 1	解 2
均匀参数化	0.5000	−0.4219	6.7500	−27.5625	8.0000−1.1547i	8.0000+1.1547i
弦长参数化						
弧长参数化						

表 9　实例 4 均匀参数化方法

方法	解 1			解 2		
	弧长	弯曲能量	旋转数	弧长	弯曲能量	旋转数
均匀参数化	6.9282	37.4766	0.7728	6.9282	37.4766	0.7728
弦长参数化						
弧长参数化						

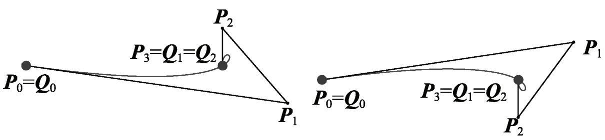
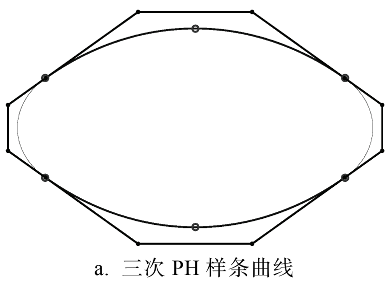
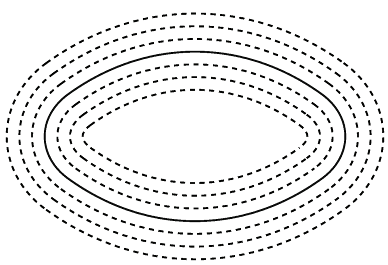


图 5　均匀参数化方法对实例 4 得到的三次 PH 曲线



a. 三次 PH 样条曲线



b. 三次 PH 样条曲线的等距曲线

图 6　三次 PH 样条曲线构造及其等距线

4　结　语

本文指出给定平面 3 个型值点, 存在不超过 2 条的三次 PH 曲线可以插值这 3 个点, 并给出了相应的构造方法, 完善了三次 PH 曲线的相关理论. 从弧长、弯曲能量、绝对旋转数等方面, 通过实例比较了均匀参数化、弦长参数化、弧长参数化方法在三次 PH 曲线插值中的不同效果. 最后, 通过实例说明本文方法可应用于三次 PH 样条的构造. 本文工作继续推广, 可对任意给定的曲线使用三次 PH 样条进行逼近, 今后也可进一步讨论高次 PH 样条构造的可能性.

参考文献(References):

[1] Farouki R T, Sakkalis T. Pythagorean hodographs[J]. IBM Journal of Research and Development, 1990, 34(5): 736-752

[2] Farouki R T. Pythagorean-hodograph curves: algebra and geometry inseparable[M]. Heidelberg: Springer, 2008

[3] Farouki R T, Manjunathaiah J, Nicholas D, *et al*. Variable-feedrate CNC interpolators for constant material removal rates along Pythagorean-hodograph curves[J]. Computer-Aided Design, 1998, 30(8): 631-640

[4] Farouki R T, Giannelli C, Sestini A. Identification and “reverse engineering” of Pythagorean-hodograph curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 2015, 34: 21-36

[5] Wang G Z, Fang L C. On control polygons of quartic Pythagorean-hodograph curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 2009, 26(9): 1006-1015

[6] Fang L C, Wang G Z. Geometric characteristics of planar quintic Pythagorean-hodograph curves[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2018, 330: 117-127

[7] Wang H, Zhu C G, Li C Y. Identification of planar sextic Pythagorean-hodograph curves[J]. Journal of Mathematical Research with Applications, 2017, 37(1): 59-72

[8] Zheng Z H, Wang G Z, Yang P. On control polygons of Pythagorean hodograph septic curves[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2016, 296: 212-227

[9] Farouki R T, Neff C A. Hermite interpolation by Pythagorean hodograph quintics[J]. Mathematics of Computation, 1995, 64(212): 1589-1609

[10] Moon H P, Farouki R T, Choi H I. Construction and shape analysis of PH quintic Hermite interpolants[J]. Computer Aided Geometric Design, 2001, 18(2): 93-115

[11] Yong Junhai, Zheng Wen. Geometric method for Hermite interpolation by a class of PH quintics[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2005, 17(5): 990-995(in Chinese)
(雍俊海, 郑文. 一类五次 PH 曲线 Hermite 插值的几何方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2005, 17(5): 990- 995)

[12] Meek D S, Walton D J. Geometric Hermite interpolation with Tschirnhausen cubics[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1997, 81(2): 299-309

[13] Byrtus M, Bastl B. G^1 Hermite interpolation by PH cubics revisited[J]. Computer Aided Geometric Design, 2010, 27(8): 622-630

[14] Jüttler B. Hermite interpolation by Pythagorean hodograph curves of degree seven[J]. Mathematics of Computation, 2001, 70(235): 1089-1111

[15] Kong J H, Jeong S P, Lee S, *et al*. C^1 Hermite interpolation with simple planar PH curves by speed reparametrization[J]. Computer Aided Geometric Design, 2008, 25(4/5): 214-229

[16] Farouki R T. Construction of G^2 rounded corners with Pythagorean-hodograph curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 2014, 31(2): 127-139

[17] Fang Lincong, Wang Guozhao. C^1 Hermite interpolation using sextic PH curves[J]. Scientia Sinica Mathematica, 2014, 44(7): 799-804(in Chinese)
(方林聪, 汪国昭. 六次 PH 曲线 C^1 Hermite 插值[J]. 中国科学: 数学, 2014, 44 (7): 799-804)

[18] Wang Hui, Zhu Chungang, Li Caiyun. G^2 Hermite interpolation by Pythagorean hodograph of degree six[J]. Journal of Graphics, 2016, 37(2): 155-165(in Chinese)
(王慧, 朱春钢, 李彩云. 六次 PH 曲线 G^2 Hermite 插值[J]. 图学学报, 2016, 37(2): 155-165)

[19] Sakkalis T, Farouki R T. Pythagorean-hodograph curves in Euclidean spaces of dimension greater than 3[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2012, 236(17): 4375-4382

[20] Farouki R T, al-Kandari M, Sakkalis T. Hermite interpolation by rotation-invariant spatial Pythagorean-hodograph curves[J]. Advances in Computational Mathematics, 2002, 17(4): 369-383

[21] Pottmann H. Rational curves and surfaces with rational offsets[J]. Computer Aided Geometric Design, 1995, 12(2): 175-192

[22] Farouki R T, Šír Z. Rational Pythagorean-hodograph space curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 2011, 28(2): 75-88

[23] Farouki R T, Jüttler B, Manni C. Pythagorean-hodograph curves and related topics[J]. Computer Aided Geometric Design, 2008, 25(4/5): 203-204

[24] Kosinka J, Lávicka M. Pythagorean hodograph curves: a survey of recent advances[J]. Journal for Geometry and Graphics, 2014, 18(1): 23-43