

## 非球头刀单触点宽行加工刀具运动优化方法

周凯红<sup>1,2)</sup>, 唐进元<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(桂林理工大学机械与控制工程学院 桂林 541004)

<sup>2)</sup>(中南大学高性能复杂制造国家重点实验室 长沙 410083)  
(681023@163.com)

**摘要:** 将非球面刀具的单触点宽行加工复杂曲面问题归结为刀具曲面包络特征线在运动变换下逼近设计曲面的曲面拟合问题, 提出复杂曲面非球面刀具单触点宽行加工的通用刀具运动优化方法—曲面包络逼近原理. 该方法基于曲面自然活动标架理论, 推导了由刀具曲面和设计曲面运动不变量参数描述的、通用规范的刀具相对工件运动的速度方程和运动变换矩阵; 分别以加工效率和加工精度最优为目标, 建立了能确保刀具相对工件运动连续光滑的刀位优化的泛函极值模型. 最后通过一个圆锥面刀具和一个圆环面刀具的数控加工复杂曲面的仿真实例, 论证了文中方法的精确性、有效性和通用性.

**关键词:** 活动标架; 宽行加工; 复杂曲面; 包络逼近

中图分类号: TP391.41      DOI: 10.3724/SP.J.1089.2018.16910

## Single Point Contact Strip-Width-Maximization Machining Optimization for Sculptured Surface Using Non-ball-end

Zhou Kaihong<sup>1,2)</sup> and Tang Jinyuan<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(College of Mechanical and Control Engineering, Guilin University of Technology, Guilin 541004)

<sup>2)</sup>(State Key Laboratory of High Performance Complex Manufacturing, Central South University, Changsha 410083)

**Abstract:** A universal envelope-approximation theory was presented to generate the sculptured surface by strip-width-maximization machining with single point contact using non-ball-end cutters, formulating the problem of multi-axis sculptured surface machining as that of approximating the cutter surface to the design surface under the movement transform. The speed equation and the movement transform matrix is deduced to determine the relative motion between the tool and the workpiece by intrinsic differential geometry based on the idea of the moving frame. The functional optimized model of the tool positioning was established to enable the relative motion between the tool and the workpiece to be smooth and continuous, aiming at the highest machining efficiency and machining accuracy respectively. Simulated examples demonstrate the improved machining efficiency and precision of the envelope-approximation Theory over current published methods.

**Key words:** moving frame; strip-width-maximization machining; sculptured surface; envelopment-approximation

宽行数控加工技术利用多轴联动数控机床的多自由度运动功能, 通过适当地调整非球面刀具的刀位和姿态, 获得最优的加工效率和加工精度.

这项技术在飞机、汽车、舰船和模具制造等行业都有着重要的应用前景. 然而, 由于对多轴联动数控加工中复杂的刀具运动缺乏统一规范描述方法,

收稿日期: 2017-10-08; 修回日期: 2018-06-29. 基金项目: 国家自然科学基金(51265008); 高性能复杂制造国家重点实验室开放基金(HPCM-2013-06). 周凯红(1968—), 男, 博士, 教授, 硕士生导师, 主要研究方向为复杂曲面宽行加工技术、点啮合齿面数字化设计和制造技术; 唐进元(1962—), 男, 硕士, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为机械设计及理论.

加之非球面刀具的刀位规划、精度控制和干涉检查等问题较球面刀具加工要复杂很多, 以往这方面的研究仅限于针对特定类型的刀具, 采用单刀位下刀具曲面与工件曲面间的局部结构优化来近似简化处理刀位规划问题, 没有形成通用的、能真实地反映实际加工过程的刀具相对工件运动控制优化理论<sup>[1-7]</sup>。

近年来, 复杂曲面非球面刀具宽行加工的研究主要围绕旋转面刀具、高阶切触逼近、在无简化设计曲面情况下精确计算曲面整体误差等方面展开。Zhu 等<sup>[8-9]</sup>提出单个刀位下确保刀具包络曲面与设计曲面沿刀触点轨迹曲线具有三阶切触的刀位控制方法, 其适用于任意回转面刀具以各种方式加工任意设计曲面; 接着将回转刀具包络曲面描述为双参数球族包络, 以刀具形状(半径函数)和刀具路径(刀轴面)控制刀具包络曲面形状, 进而按照 ANSI 和 ISO 标准, 运用点-曲面法向距离函数理论建立起 2 种控制设计曲面与包络曲面之间整体结构误差的离散刀位优化模型<sup>[10-11]</sup>。Gong 等<sup>[12]</sup>运用等距包容原理将刀具包络曲面与设计曲面整体误差计算转化为轴迹面与设计曲面的等距面的最小二乘逼近问题, 并在考虑离散刀位的优化以及端部约束和无过切约束的前提下, 研究一般回转刀具加工非可展直纹面的刀位整体优化方法。陈志同等<sup>[13-14]</sup>提出一种宽行端铣加工单调凸或凹的复杂曲面的刀轨生成统一方法, 先将刀轨进行离散化处理, 利用中点法获得优化刀位和行宽, 进而对刀位进行光顺并保证行宽的均匀性, 实现了复杂曲面的高效率的等材料去除数控加工。邹启晓等<sup>[15]</sup>和董雷等<sup>[16]</sup>将圆柱刀和圆锥刀侧铣非可展直纹面的理论模型归结为刀具曲面与设计曲面的最佳平方逼近问题, 从刀具轴线出发, 以被加工曲面的刀位规划误差为纽带, 得到刀具曲面上的一条映射曲线, 由该曲线表征刀具曲面与被加工曲面的贴近程度, 提出了确定刀具位置的最小二乘逼近模型和解算方法。

当前的非球面刀具的单触点宽行加工复杂曲面方法主要存在 3 方面的问题: (1) 刀具相对工件的运动描述缺乏通用方法, 使刀位规划无法实现从局部到整体的协调优化; (2) 在刀具包络曲面整体逼近方面采取一些不规范的近似方法, 使刀具包络曲面逼近设计曲面的方法缺乏可操作性和稳定性; (3) 先将刀位规划转化为单个刀位下的刀具曲面与工件曲面间的优化逼近问题, 再在各刀位之间人为附加连续光滑(光顺)条件, 因此, 无法

完全按预定的加工目标要求得到真实反映实际加工过程的、整体连续光滑的刀具相对工件运动方程。这些问题的存在不仅增加了非球面刀具的多轴联动数控加工复杂曲面刀位规划的复杂程度, 而且使其加工精度和加工效率无法提高到其应有的水平。

针对这些问题, 本文基于微分几何的曲面自然活动标架理论, 提出复杂曲面非球面刀具宽行加工的通用方法——曲面包络逼近原理。通过 3 个途径解决上述 3 个问题: (1) 通过微分几何的曲面活动标架运动理论, 推导由刀具曲面和设计曲面运动不变量描述的、通用规范的刀具相对工件运动的速度方程和运动变换矩阵, 由设计曲面本身的几何结构的连续光滑性保证刀具相对工件运动的连续光滑特性, 避免附加人为连续光滑条件缩小可行域而损失最优解; (2) 将非球面刀具的多轴联动数控加工复杂曲面的刀位规划问题归结为刀具曲面在运动变换下, 以简单(刀具)曲面(如平面、圆柱面、圆锥面和各种回转面及螺旋面等)上的定向曲面片(刀具包络面特征线上的微分流形)为样条曲线, 按指定的插值条件(刀具包络面与设计曲面沿刀触点轨迹线具有二阶切触)和精度要求逼近设计曲面的曲面拟合问题, 从而可借助自由曲面的有理样条逼近理论, 论证曲面的包络逼近原理是一种精确、规范的刀具包络曲面逼近设计曲面的方法; (3) 分别以加工效率和加工精度最优为目标, 建立能确保刀具相对工件运动连续光滑的刀位优化的泛函极值模型, 为刀位规划实现从局部到整体的协调优化创造条件。求解该泛函极值模型, 可得到满足预定的加工目标要求, 真实反映实际加工过程、整体连续光滑的刀具相对工件运动方程。

## 1 曲面的包络逼近原理

曲面的多项式样条逼近理论是一种以简单(多项式)函数为基函数近似描述复杂曲面的数学方法, 它将空间曲面描述为多项式空间样条曲线组成的线性空间。多轴联动数控加工中, 刀具曲面通过沿刀触点轨迹线的空间包络运动, 在每个时刻(运动位置)包络而成一条特征线, 这些特征线按运动关系沿刀触点轨迹线在设计曲面(工件)坐标系中分布形成刀具曲面包络面, 即刀具曲面包络特征线的运动空间。这样就形成了以包络特征线为样条曲线、以设计曲面为逼近目标曲面、以刀触点轨迹

线为曲面逼近边界条件的曲面逼近模型. 通过控制刀具相对工件的包络运动关系, 可以控制包络特征线及其空间分布, 从而控制刀具包络曲面逼近设计曲面的误差, 这就是曲面的包络逼近原理. 下面从样条(基函数)曲线、插值(边界)条件和逼近误差估计 3 个方面阐述曲面包络逼近理论的内容.

1.1 包络逼近的样条曲线: 包络特征线描述

曲面在空间运动中, 在某一瞬时(运动位置)所产生的包络特征线与曲面在空间的运动方式有关, 由啮合方程确定. 曲面在所有运动位置所形成的包络特征线的集合, 就是包络特征线空间(包络曲面), 显然, 确定包络特征线的关键是确定曲面在空间的运动方式. 为了使曲面的包络逼近理论具有一般性和通用性, 有关包络运动的描述将在曲面的固有坐标系——曲面活动标架下进行, 由曲面的运动不变量来表示, 而与其他坐标系和参数无关.

1.1.1 活动标架沿曲面和表面上的曲线运动的描述

将微分几何的活动标架理论运用于刀具曲面相对设计曲面的运动描述, 可以建立刀具曲面包络运动与刀具曲面和设计曲面局部运动不变量参数的直接关系, 形成通用规范的刀具相对工件运动的描述方法, 为实现刀位规划从局部到整体的协调优化提供便利<sup>[17]</sup>.

**定理 1.** 如图 1 所示, 设有(刀具)曲面  $\Sigma_t: r_t(u_t, v_t) \in C^2$ , 其参数  $u_t, v_t$  构成正交参数网, 则在曲面  $\Sigma_t$  上任意一点  $M(u_{tM}, v_{tM})$  取定了一个右手单位正交活动标架场

$$S_{ft} \left[ M; e_1 = \frac{r_1}{\sqrt{E}} \quad e_2 = \frac{r_2}{\sqrt{G}} \quad e_3 = n_{tM} = e_1 \times e_2 \right],$$

$$r_1 = \frac{dr_t}{du_{tM}}, r_2 = \frac{dr_t}{dv_{tM}}, E = r_1 \cdot r_1, G = r_2 \cdot r_2.$$

当点  $M$  沿正交参数网线  $u_{tM}$  和  $v_{tM}$  以速度  $V_{Mt} = \frac{du_{tM}}{dt} e_1 + \frac{dv_{tM}}{dt} e_2$  相对于(刀具)曲面固结的  $S_t [O^{(t)}; x^{(t)} \quad y^{(t)} \quad z^{(t)}]$  (刀具坐标系)移动时, 活动标架  $S_{ft}$  也随之移动并绕  $M$  转动. 由微分几何的曲面论的基本定理, 活动标架  $S_{ft}$  相对刀具坐标系  $S_t$  的运动(坐标轴单位矢量矢端速度)方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{n}_{tM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ n_{tM} \end{bmatrix} \quad (1)$$

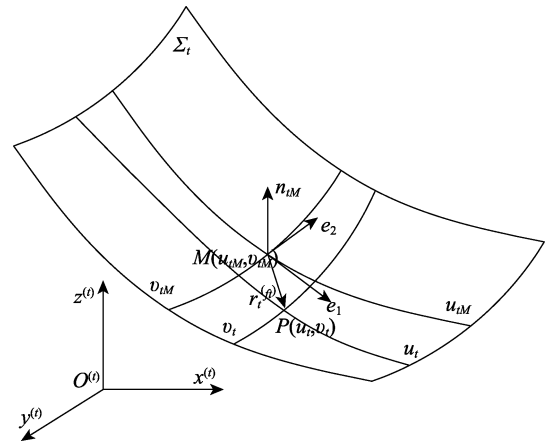


图 1 曲面活动标架沿曲面的运动描述

其中, 方阵是活动标架  $S_{ft}$  绕点  $M$  转动的角速度矢量  $\omega_t$  的方阵形式, 写成矢量形式为

$$\omega_t = \omega_{23} e_1 - \omega_{13} e_2 + \omega_{12} n_{tM} \quad (2)$$

其中,

$$\begin{cases} \omega_{12} = \frac{-E_2 \frac{du_{tM}}{dt} + G_1 \frac{dv_{tM}}{dt}}{2\sqrt{EG}} \\ \omega_{23} = \frac{M \frac{du_{tM}}{dt} + N \frac{dv_{tM}}{dt}}{\sqrt{G}} \\ \omega_{13} = \frac{L \frac{du_{tM}}{dt} + M \frac{dv_{tM}}{dt}}{\sqrt{E}} \end{cases};$$

$E_2 = \frac{dE}{dv_{tM}}, G_1 = \frac{dG}{du_{tM}}, M = n_{tM} \cdot \frac{\partial^2 r_t}{\partial u_{tM} \partial v_{tM}}, N = n_{tM} \cdot \frac{\partial^2 r_t}{\partial v_{tM}^2}$  和  $L = n_{tM} \cdot \frac{\partial^2 r_t}{\partial u_{tM}^2}$ , 它们都是曲面的运动不变量参数.

**定理 2.** 如图 2 所示, 设  $L_p$  是(设计)曲面  $\Sigma_p: r_p(u_p, v_p) \in C^2$  上的一条(刀触点轨迹)曲线, 其方程为  $r_{pM} = r_{pM}(u_{pM}(s_p), v_{pM}(s_p))$ ,  $s_p$  为曲线  $L_p$  的弧长参数; 曲线  $L_p$  上任意一点  $M$  的单位切矢为  $\alpha$ , 曲面在该点的单位法向量为  $n_{pM}$ , 则在曲线  $L_p$  上点  $M$  处取定了一个右手单位正交活动标架场  $S_{fp} [M; \alpha \quad v = n_{pM} \times \alpha \quad n_{pM}]$ . 当  $M$  沿  $L_p$  以速度  $V_{Mp} = \frac{ds_p}{dt} \alpha$  相对于设计曲面  $\Sigma_p$  固结的坐标系  $S_p [O^{(p)}; x^{(p)} \quad y^{(p)} \quad z^{(p)}]$  (工件坐标系)移动时, 活动标架  $S_{fp}$  也随之移动并绕  $M$  转动. 由微分几何的曲面论的基本定理, 活动标架  $S_{fp}$  的相对坐标系  $S_p$  运动(坐标轴单位矢量矢端速度)方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\nu} \\ \dot{n}_{pM} \end{bmatrix} = \frac{ds_p}{dt} \begin{bmatrix} 0 & \kappa_{g\alpha}^{(p)} & \kappa_{n\alpha}^{(p)} \\ -\kappa_{g\alpha}^{(p)} & 0 & \tau_{g\alpha}^{(p)} \\ -\kappa_{n\alpha}^{(p)} & -\tau_{g\alpha}^{(p)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \nu \\ n_{pM} \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中, 方阵是活动标架  $S_{fp}$  绕点  $M$  转动的角速度矢量  $\omega_p$  的方阵形式, 写成矢量形式为

$$\omega_p = \frac{ds_p}{dt} (\tau_{g\alpha}^{(p)} \alpha - \kappa_{n\alpha}^{(p)} \nu + \kappa_{g\alpha}^{(p)} n_{pM}) \quad (4)$$

$\tau_{g\alpha}^{(p)}$ ,  $\kappa_{n\alpha}^{(p)}$  分别是曲面  $\Sigma_p$  在点  $M$  沿  $\alpha$  方向的短程绕率和法曲率,  $\kappa_{g\alpha}^{(p)}$  是曲面  $\Sigma_p$  在点  $M$  沿  $\alpha$  方向的短程曲率; 它们都是曲面  $\Sigma_p$  上的曲线  $L_p$  的运动不变量参数.

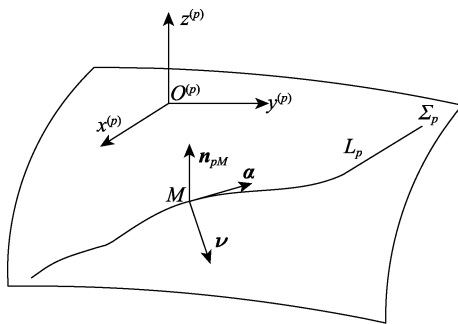


图 2 曲面活动标架沿表面上的曲线运动的描述

定理 1 和定理 2 都源于微分几何的曲面活动标架理论, 它们在曲面和表面上的曲线的自然坐标系(活动标架)下, 以曲面和表面上的曲线的运动不变量参数分别描述了刚体(活动标架)沿曲面和表面上的曲线的运动; 同时又从刚体运动学的角度描述了曲面和表面上的曲线的微分结构, 建立了刚体(活动标架)沿曲面和表面上的曲线的运动与曲面和表面上的曲线的微分结构的直接联系, 为刀具曲面展成复杂曲面的包络运动描述提供了一种通用而方便的方法.

### 1.1.2 刀具曲面与其包络面的相对运动速度

以曲面  $\Sigma_i$  为刀具曲面,  $\Sigma_p$  为待加工的设计曲面,  $L_p$  为  $\Sigma_p$  上的一条刀触点轨迹线. 将图 1 和图 2 所示的 2 个曲面及其附属活动标架、曲线和坐标系“装配”在一起, 使两曲面相切于点  $M$ , 形成刀具曲面  $\Sigma_i$  加工复杂曲面  $\Sigma_p$  的示意图, 如图 3 所示, 即刀具曲面  $\Sigma_i$  通过相对于设计曲面  $\Sigma_p$  的运动  $\Psi$  包络出曲面  $\Sigma_g$ . 图 3 中,  $L_g$  是形成包络曲面  $\Sigma_g$  的包络特征线. 因此, 在刀具曲面  $\Sigma_i$  沿刀触点轨迹线  $L_p$  相对设计曲面  $\Sigma_p$  运动的任意时刻, 曲面

$\Sigma_i$  与  $\Sigma_g$  相切于  $L_g$ ,  $L_g$  和  $L_p$  交于点  $M$ . 适当地控制刀具曲面  $\Sigma_i$  相对设计曲面  $\Sigma_p$  的运动  $\Psi$ , 使刀具曲面始终在  $L_p$  上一点  $M$  处与设计曲面  $\Sigma_p$  作单触点切削, 则刀具曲面  $\Sigma_i$  在包络运动  $\Psi$  下所形成的包络曲面  $\Sigma_g$  沿刀触点轨迹线  $L_p$  与设计曲面  $\Sigma_p$  相切. 由定理 1 可知坐标系  $S_i$  相对活动标架  $S_{fi}$  的角速度  $\omega_p$ , 由定理 2 可知活动标架  $S_{fp}$  相对坐标系  $S_p$  的角速度  $\omega_t$ , 而由图 3 可知活动标架  $S_{fp}$  相对活动标架  $S_{fi}$  的角速度为  $\omega_{tp} = \frac{d\Delta}{dt} n_{tM}$ , 故曲面  $\Sigma_i$  相对曲面  $\Sigma_g$  (或  $\Sigma_p$ ) 的包络运动  $\Psi$  的角速度为

$$\begin{aligned} \omega_{ip} &= \omega_p - \omega_t - \frac{d\Delta}{dt} n_{tM} = \\ &= -(\omega_{23} e_1 - \omega_{13} e_2 + \omega_{12} n_{tM}) + \\ &= \left( \tau_{g\alpha}^{(p)} \alpha - \kappa_{n\alpha}^{(p)} \nu + \kappa_{g\alpha}^{(p)} n_{pM} \right) \frac{ds_p}{dt} - \frac{d\Delta}{dt} n_{tM} \quad (5) \end{aligned}$$

由同样的分析方法可知, 在  $M$  点处, 曲面  $\Sigma_i$  相对曲面  $\Sigma_g$  的速度为

$$\begin{aligned} V_{Mip} &= V_{Mip} - V_{Mt} = -\left( \frac{du_{tM}}{dt} e_1 + \frac{d\nu_{tM}}{dt} e_2 \right) + \\ \frac{ds_p}{dt} \alpha &= \left[ -\left( \frac{du_{tM}}{ds_p} e_1 + \frac{d\nu_{tM}}{ds_p} e_2 \right) + \alpha \right] \frac{ds_p}{dt} \quad (6) \end{aligned}$$

按式(6)的方式, 将式(5)中的  $\frac{ds_p}{dt}$  因子提出来, 并将之指定为基准速率, 不失一般性, 令  $\frac{ds_p}{dt} = 1$ , 消除时间参数  $t$ , 则在曲面  $\Sigma_i$  上任一点  $P(u_t, \nu_t)$ , 曲面  $\Sigma_i$  相对曲面  $\Sigma_g$  的速度函数可表示为

$$\begin{aligned} V_{ip} &\left( u_{tM}, \nu_{tM}, s_p, \frac{du_{tM}}{ds_p}, \frac{d\nu_{tM}}{ds_p}, u_t, \nu_t, \Delta, \frac{d\Delta}{ds_p} \right) = \\ &= \omega_{ip} \times r_t^{(fi)} + V_{Mip} \quad (7) \end{aligned}$$

其中,  $r_t^{(fi)}$  表示点  $P(u_t, \nu_t)$  在活动标架  $S_{fi}$  下的位置矢量;  $\Delta$  是  $S_{fi}$  和  $S_{fp}$  之间的夹角, 如图 3 所示.

显然, 如果按式(5)~式(7)控制刀具相对工件的运动  $\Psi$ , 则刀具曲面  $\Sigma_i$  的包络曲面  $\Sigma_g$  与设计曲面  $\Sigma_p$  沿刀触点轨迹线  $L_p$  相切(因为上述 3 个曲面  $\Sigma_i$ ,  $\Sigma_g$  和  $\Sigma_p$  在任一刀触点  $M$  的法矢都始终重合), 故曲面  $\Sigma_g$  在曲线  $L_p$  上的每一点  $M$  沿曲线  $L_p$  的单位切矢  $\alpha$  方向与设计曲面  $\Sigma_p$  有相等的短程绕率  $\tau_{g\alpha}^{(p)}$ 、法曲率  $\kappa_{n\alpha}^{(p)}$  和短程曲率  $\kappa_{g\alpha}^{(p)}$ . 由于刀具曲面

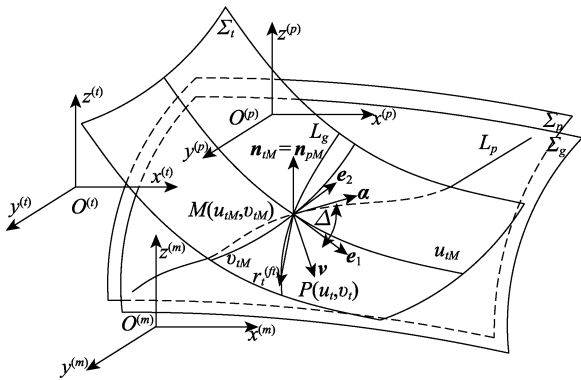


图 3 刀具曲面沿刀触点轨迹线的相对运动

$\Sigma_t$  和设计曲面  $\Sigma_p$  都是二阶以上连续可微曲面, 因此不仅保证了按式(5)~式(7)所描述的运动  $\Psi$  的光滑连续性, 而且完全按刀具曲面  $\Sigma_t$  和设计曲面  $\Sigma_p$  的结构要求确定了运动  $\Psi$  的可行域, 从而可以摆脱诸如加工机床结构等外部条件的限制, 完全按刀具曲面  $\Sigma_t$  的结构特点和设计曲面  $\Sigma_p$  的结构要求建立刀具相对工件运动的全局优化模型。

实际上, 运动  $\Psi$  也代表一种从曲面  $\Sigma_t$  到曲面  $\Sigma_g$  的运动变换. 如果刀具曲面  $\Sigma_t$  是一种结构比较简单的曲面(如平面、圆柱面、圆锥面和各种螺旋面等), 那么通过控制这种变换就可能包络出(张成)结构复杂的曲面族(空间)  $\Sigma_g$ ; 而通过优化运动变换参数, 可以在这个曲面族中优选出一曲面  $\Sigma_g$ , 使其沿指定的刀触点轨迹线  $L_p$  与设计曲面  $\Sigma_p$  相切, 且在曲线  $L_p$  上的每一点沿任意方向的短程挠率和法曲率均相等(即为插值条件)并以指定(最小)的(拟合)误差逼近设计曲面. 这就是包络逼近原理。

### 1.1.3 从曲面 $\Sigma_t$ 到其包络曲面 $\Sigma_g$ 的运动变换

由图 3 可知, 从曲面  $\Sigma_t$  到曲面  $\Sigma_g$  的坐标变换路径如图 4 中虚线上面部分的路径所示, 运动变换齐次矩阵  $M_{ft}$ ,  $M_{fpft}$ ,  $M_{pfp}$  的意义如图 4 所示, 它们完全由刀具曲面  $\Sigma_t$  和设计曲面  $\Sigma_p$  沿刀触点轨迹线  $L_p$  的曲面运动不变量参数来描述, 以基于曲面活动标架的内蕴微分几何学的方法设计了展成曲面  $\Sigma_g$  时刀具相对工件的运动  $\Psi$ . 在这种运动描述方式中,  $\Psi$  完全由曲面  $\Sigma_t$  和设计曲面  $\Sigma_p$  的微分几何结构确定. 如图 3 和图 4 可知, 从曲面  $\Sigma_t$  到设计曲面  $\Sigma_p$  的变换矩阵为

$$M_{pt} = M_{pfp} M_{fpft} M_{ft} \quad (8)$$

其中,

$$M_{ft} = \begin{bmatrix} e_{1x} & e_{1y} & e_{1z} & -(x_{tM}e_{1x} + y_{tM}e_{1y} + z_{tM}e_{1z}) \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} & -(x_{tM}e_{2x} + y_{tM}e_{2y} + z_{tM}e_{2z}) \\ n_{tMx} & n_{tMy} & n_{tMz} & -(x_{tM}n_{tMx} + y_{tM}n_{tMy} + z_{tM}n_{tMz}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_{fpft} = \begin{bmatrix} \cos \Delta & -\sin \Delta & 0 & 0 \\ \sin \Delta & \cos \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_{pfp} = \begin{bmatrix} \alpha_x & v_x & n_{pMx} & x_{pM} \\ \alpha_y & v_y & n_{pMy} & y_{pM} \\ \alpha_z & v_z & n_{pMz} & z_{pM} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

需要说明的是,

$$r_{tM}^{(t)}(u_{tM}, v_{tM}) = [x_{tM}(u_{tM}, v_{tM}) \quad y_{tM}(u_{tM}, v_{tM}) \quad z_{tM}(u_{tM}, v_{tM}) \quad 1]^T$$

表示曲面  $\Sigma_t$  上任意点  $M$  在刀具坐标系  $S_t$  中的位置矢量函数, 此  $M$  点与曲面  $\Sigma_p$  上的曲线  $L_p$  上的  $M$  点关于运动  $\Psi$  共轭。

$$r_{pM}^{(p)}(s_p) = [x_{pM}(s_p) \quad y_{pM}(s_p) \quad z_{pM}(s_p) \quad 1]^T$$

表示曲线  $L_p$  在工件坐标系  $S_p [O^{(p)}; x^{(p)} \quad y^{(p)} \quad z^{(p)}]$  中的矢量参数方程, 也是曲面  $\Sigma_p$  上的曲线  $L_p$  上的  $M$  点的位置矢量函数。

另外, 必须说明的是, 图 4 中虚线下面部分的坐标变换路径是在多轴联动数控机床上实现刀具包络运动的坐标变换路径. 其中,

$$S_m [O^{(m)}; x^{(m)} \quad y^{(m)} \quad z^{(m)}]$$

是与机床机架固结的机床固定坐标系, 这个坐标变换路径中的运动变换齐次矩阵  $M_{mt}$  和  $M_{pm}$  完全由具体加工曲面的机床结构参数和加工软件中设置的加工参数确定. 图 4 中, 虚线上下 2 个坐标变换路径完全等效, 一个直接由刀具曲面  $\Sigma_t$  和待加工的设计曲面  $\Sigma_p$  沿刀触点轨迹线  $L_p$  的曲面运动不变量参数来描述, 在刀具包络运动设计方面通用而简便; 一个由具体加工曲面的机床结构参数和加工软件中设置的加工参数描述, 在刀具包络运动实现方面实用而又针对性强. 这种将多轴联动数控加工复杂曲面过程中, 刀具相对工件运动的设计和实现分别如图 4 这样分开考虑、综合实现的方法, 正是本文方法的优势和特色。

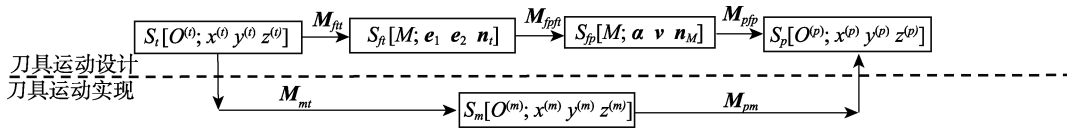


图 4 从刀具曲面  $\Sigma_t$  到刀具包络曲面  $\Sigma_g$  的坐标变换路径

1.1.4 刀具曲面包络的曲面运动不变量参数描述

式(5)~式(8)是由刀具曲面和设计曲面运动不变量参数描述的刀具曲面包络运动  $\Psi$ , 将之应用于刀具曲面包络面的描述, 便得到刀具曲面和设计曲面运动不变量参数描述的刀具曲面包络特征线和包络曲面.

由啮合方程和相对运动变换关系, 曲面  $\Sigma_t$  的包络面  $\Sigma_g$  在与设计曲面  $\Sigma_p$  固结的坐标系(工件坐标系)  $S_p [O^{(p)}; x^{(p)} y^{(p)} z^{(p)}]$  下的方程为

$$\begin{cases} \mathbf{r}_g^{(p)} = \mathbf{M}_{pt} \mathbf{r}_t^{(t)} \\ \mathbf{N}_t \cdot \mathbf{V}_p = 0 \end{cases} \quad (9)$$

其中,  $\mathbf{r}_t^{(t)}(u_t, v_t) = [x_t(u_t, v_t) \ y_t(u_t, v_t) \ z_t(u_t, v_t) \ 1]^T$  表示刀具曲面  $\Sigma_t$  上任意点  $P$  在刀具坐标系  $S_t$  下的位置矢量函数;  $\mathbf{N}_t(u_t, v_t)$  是曲面  $\Sigma_t$  上任意一点  $P$  处单位法矢的矢量函数, 此点  $P$  是曲面  $\Sigma_t$  上不同于点  $M$  的另一任意点, 如图 3 所示.

对式(4)~式(9)的分析可知, 式(9)所确定的刀具包络面  $\Sigma_g$  是由曲面  $\Sigma_t$ 、曲线  $L_p$  与  $\Sigma_p$  的相应运动不变量参数  $u_{tM}(s_p)$  和  $v_{tM}(s_p)$  及  $\Delta$  来描述的, 它与设计曲面  $\Sigma_p$  沿刀触点轨迹曲线  $L_p$  相切, 这使得有可能在不考虑诸如加工机床具体结构等外部因素的情况下, 建立刀具相对工件的运动优化模型, 使刀具包络曲面相对设计曲面沿刀触点轨迹曲线  $L_p$  满足预定的局部结构要求(插值条件); 同时, 在刀触点轨迹曲线  $L_p$  以外的大范围区域, 使刀具包络曲面相对设计曲面的误差全局最小, 从而实现刀位规划从局部到整体的协调优化. 下面讨论在包络运动  $\Psi$  满足式(5)~(8)的情况下: (1) 如果适当调整待定参数  $\Delta$ , 则可以进一步使刀具曲面包络面  $\Sigma_g$  在刀具曲面  $\Sigma_t$  和设计曲面  $\Sigma_p$  的公切平面上沿刀触点轨迹线  $L_p$  的切线的垂直方向( $\mathbf{v}$  方向)的法曲率  $\kappa_{nv}^{(g)}$  与设计曲面  $\Sigma_p$  沿同一方向的法曲率  $\kappa_{nv}^{(p)}$  相等; 再结合刀具包络曲面  $\Sigma_g$  与设计曲面  $\Sigma_p$  沿刀触点轨迹曲线  $L_p$  相切的条件, 就得到刀具包络曲面  $\Sigma_g$  与设计曲面  $\Sigma_p$  在曲线  $L_p$  上的每一

点沿任意方向的短程挠率和法曲率均相等的插值条件. (2) 适当调整运动不变量参数  $u_{tM}(s_p)$  和  $v_{tM}(s_p)$  可以实现在刀触点轨迹曲线  $L_p$  以外的大范围区域, 刀具包络曲面相对设计曲面的误差全局最小.

1.2  $\Sigma_g$  逼近  $\Sigma_p$  的插值边界条件

要比较刀具包络曲面相对设计曲面的误差, 必须先指定它们之间在空间上相对的位置关系. 对于不同的加工(逼近)方法和不同的曲面加工要求, 刀具曲面包络曲面  $\Sigma_g$  (实际加工曲面)相对设计曲面  $\Sigma_p$  可以有不同的位置关系, 它实际上反映的是两曲面之间局部结构的关系. 从曲面逼近的观点来看, 这就是刀具包络曲面逼近相对设计曲面的插值边界条件, 即以往同类研究中的约束条件<sup>[8-9]</sup>.

如前文所述, 非球面刀具展成复杂曲面的问题实质上是一类曲面插值逼近问题. 理论上, 其插值条件可以指定为任何需要精确保证的重要几何结构及其尺寸. 例如, 在以单点切触方式加工曲面中, 通常将沿刀触点轨迹线的几何局部结构作为必须精确保证的插值条件. 当然, 有的曲面加工对于曲面局部结构并无精确的要求, 如以多点切触方式加工曲面<sup>[5]</sup>时, 允许过切现象的出现, 刀具包络曲面将与设计曲面相交. 此时, 刀具包络曲面逼近相对设计曲面的插值边界条件就是这 2 个曲面的交线. 因此, 这种情况下的宽行加工方法也同样可以用本文所述曲面包络逼近方法论述. 下面仅针对单点切触加工复杂曲面的情形讨论.

将沿刀触点轨迹线的几何局部结构作为必须精确保证的插值条件, 使刀具曲面包络面与设计曲面沿刀触点轨迹线相切, 且两者在曲线上的每一点沿任意方向的短程挠率和法曲率均相等. 这不仅能使实际加工曲面在刀触点轨迹线周围的给定行宽范围内以最小误差逼近设计曲面, 而且能避免局部曲率干涉(local gouging)和过切(rear gouging)对设计曲面造成的破坏.

如图 3 所示,  $\Delta$  是刀具曲面和设计曲面(刀具

包络曲面)活动标架的夹角, 其在任一时刻的取值理论上可以与刀具曲面和设计曲面的几何结构无关(因为两曲面的微分结构本来就可以没有任何关系), 而可以任意指定, 以满足加工所要求保证的重要几何结构及其尺寸(插值条件). 下面证明: 如果把刀具包络面  $\Sigma_g$  与设计曲面  $\Sigma_p$  沿曲线  $L_p$  相切, 且两者在曲线  $L_p$  上的每一点沿任意方向的短程挠率和法曲率均相等指定为  $\Sigma_g$  逼近设计曲面  $\Sigma_p$  的插值条件, 则  $\Delta$  也可以由曲面  $\Sigma_i$ 、曲线  $L_p$  与  $\Sigma_p$  的相应运动不变量  $u_{iM}(s_p)$  和  $v_{iM}(s_p)$  来描述.

图 5 所示为刀具曲面  $\Sigma_i$  展成刀触点轨迹线  $L_p$  上任一点  $M$  时, 刀具曲面  $\Sigma_i$  和设计曲面  $\Sigma_p$  公切平面上的情形. 当展成刀具包络曲面  $\Sigma_g$  的包络运动  $\Psi$  满足式(5)~式(8)时, 如果刀具包络面  $\Sigma_g$  与设计曲面  $\Sigma_p$  沿曲线  $L_p$  相切, 且两者在曲线  $L_p$  上的每一点沿任意方向的短程挠率和法曲率均相等, 则沿特征线  $L_g$  的切线方向  $\alpha_m$  的曲面,  $\Sigma_g$  和  $\Sigma_p$  的法曲率  $\kappa_{nm}^{(i)} (i = t, g, p)$  和短程挠率  $\tau_{gm}^{(i)} (i = t, g, p)$  关系为

$$\kappa_{nm}^{(t)} (= \kappa_{nm}^{(g)}) = \kappa_{nm}^{(p)} \quad (10)$$

$$\tau_{gm}^{(t)} (= \tau_{gm}^{(g)}) = \tau_{gm}^{(p)} \quad (11)$$

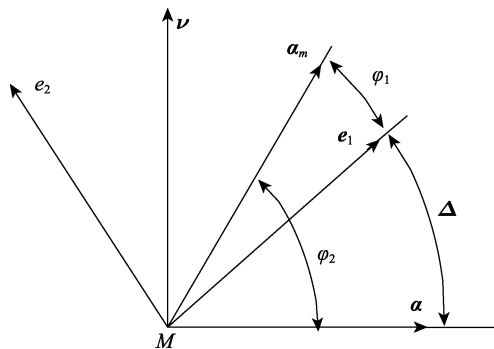


图 5 活动标架  $S_{fi}$  和活动标架  $S_{fp}$  的位置关系

另外, 由欧拉-贝特朗公式, 对于刀具曲面  $\Sigma_i$ ,

$$\kappa_{nm}^{(t)} = \kappa_{n1}^{(t)} \cos^2 \varphi_1 + 2\tau_{g1}^{(t)} \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 + \kappa_{n2}^{(t)} \sin^2 \varphi_1 \quad (12)$$

$$\tau_{gm}^{(t)} = -(\kappa_{n1}^{(t)} - \kappa_{n2}^{(t)}) \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 + \tau_{g1}^{(t)} (\cos^2 \varphi_1 - \sin^2 \varphi_1) \quad (13)$$

其中,  $\tau_{gi}^{(t)}$ ,  $\kappa_{ni}^{(t)}$  分别是曲面  $\Sigma_i$  在点  $M$  沿  $e_i (i=1,2)$  方向的短程挠率和法曲率.

对于设计曲面  $\Sigma_p$ , 也就是刀具曲面包络面  $\Sigma_g$  (插值边界条件),

$$\kappa_{nm}^{(p)} = \kappa_{n\alpha}^{(p)} \cos^2 \varphi_2 + 2\tau_{g\alpha}^{(p)} \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 + \kappa_{nv}^{(p)} \sin^2 \varphi_2 \quad (14)$$

$$\tau_{gm}^{(p)} = -(\kappa_{n\alpha}^{(p)} - \kappa_{nv}^{(p)}) \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 + \tau_{g\alpha}^{(p)} (\cos^2 \varphi_2 - \sin^2 \varphi_2) \quad (15)$$

其中,  $\kappa_{nv}^{(p)}$  是设计曲面  $\Sigma_p$ , 同时也是刀具曲面包络面  $\Sigma_g$  在刀具曲面  $\Sigma_i$  和设计曲面  $\Sigma_p$  公切平面上沿刀触点轨迹线  $L_p$  的切线的垂直方向 ( $\nu$  方向) 的法曲率. 如图 5 所示, 有

$$\Delta(u_{iM}, v_{iM}, s_p) = \varphi_2(u_{iM}, v_{iM}) - \varphi_1(s_p) \quad (16)$$

由式(10)~式(15)可以求出  $\varphi_1(u_{iM}, v_{iM})$ ,  $\varphi_2(s_p)$ , 把它们代入式(16), 可将  $\Delta$  表达为内蕴参数  $u_{iM}$ ,  $v_{iM}$ ,  $s_p$  的函数, 即当刀具曲面包络运动方程式(5)~式(8)中的待定参数  $\Delta$  满足方程式(10)~式(16)时, 刀具包络面  $\Sigma_g$  与设计曲面  $\Sigma_p$  沿曲线  $L_p$  相切, 且两者在曲线  $L_p$  上的每一点沿任意方向的短程挠率和法曲率均相等.

需要进一步说明的是: 当刀具曲面按式(5)式~式(8)作包络运动时, 刀具包络面  $\Sigma_g$  与设计曲面  $\Sigma_p$  沿曲线  $L_p$  相切, 即刀具包络面  $\Sigma_g$  在曲线  $L_p$  上的每一点  $M$  沿曲线  $L_p$  的单位切矢  $\alpha$  方向与设计曲面  $\Sigma_p$  有相等的短程挠率  $\tau_{g\alpha}^{(p)}$ , 法曲率  $\kappa_{n\alpha}^{(p)}$  和短程曲率  $\kappa_{g\alpha}^{(p)}$ ; 当式(5)~式(8)中的待定参数  $\Delta$  满足式(10)~式(16)时, 刀具包络面  $\Sigma_g$  将进一步满足包络逼近的插值边界条件, 即刀具包络面  $\Sigma_g$  与设计曲面  $\Sigma_p$  沿曲线  $L_p$  相切, 且两者在曲线  $L_p$  上的每一点沿任意方向的短程挠率和法曲率均相等.

将上述方法中求得的  $\Delta$  分别代入式(7)(8), 求得在任意点  $P(u_i, v_i)$  处曲面  $\Sigma_i$  相对曲面  $\Sigma_g$  的速度函数和从曲面  $\Sigma_i$  到曲面  $\Sigma_g$  的变换矩阵函数, 再将式(7)(8)代入式(9)并消去参数  $u_i$ , 就得到刀具曲面  $\Sigma_i$  在运动  $\Psi$  下的包络曲面  $\Sigma_g$  在与设计曲面  $\Sigma_p$  固结的坐标系(工件坐标系)  $S_p [O^{(p)}; x^{(p)} y^{(p)} z^{(p)}]$  下的矢量函数方程

$$\mathbf{r}_g^{(p)} = \mathbf{r}_g \left( u_{iM}, v_{iM}, \frac{du_{iM}}{ds_p}, \frac{dv_{iM}}{ds_p}, s_p, v_i \right) \quad (17)$$

由式(17)可知, 刀具曲面  $\Sigma_t$  按式(7)(8)描述的运动  $\Psi$  相对设计曲面  $\Sigma_p$  运动时, 包络出的曲面  $\Sigma_g$  是一个以  $(s_p, v_t)$  为曲纹坐标参数的曲面族, 这个曲面族中的所有曲面与设计曲面  $\Sigma_p$  沿刀触点轨迹曲线  $L_p$  相切, 且两者在曲线  $L_p$  上的每一点沿任意方向的短程挠率和法曲率均相等; 而在刀触点轨迹线  $L_p$  以外的曲面区域, 曲面族中的曲面  $\Sigma_g$  与设计曲面  $\Sigma_p$  存在不同的误差. 式(17)中, 参数  $v_t$  和  $s_p$  是曲面  $\Sigma_g$  的曲纹坐标参数,  $u_{tM}(s_p)$  和  $v_{tM}(s_p)$  是形成曲面族的可变参数. 因此, 有可能通过进一步优化刀具相对工件的运动式(7)(8), 确定运动不变量参数  $u_{tM}(s_p)$  和  $v_{tM}(s_p)$ , 即确定包络运动  $\Psi$  下的刀触点轨迹线  $L_p$  在刀具曲面  $\Sigma_t$  上的共轭曲线, 以实现在刀触点轨迹曲线  $L_p$  以外的大范围区域刀具包络曲面相对设计曲面的误差全局最小; 进而从上述曲面族中优选出一个与设计曲面  $\Sigma_p$  误差最小的曲面  $\Sigma_g$  作为刀具曲面  $\Sigma_t$  的包络曲面(实际加工曲面). 下面阐述包络逼近理论中包络曲面(实际加工曲面)与设计曲面之间误差估算的方法, 作为实际加工运用的理论基础.

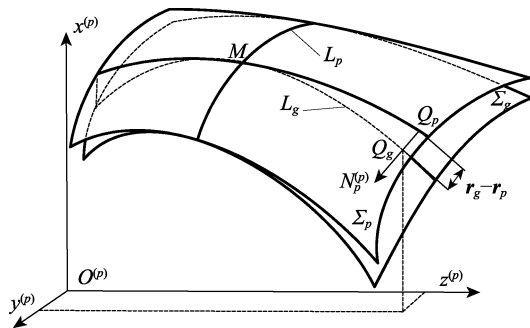


图 6 刀具包络面  $\Sigma_g$  沿接触线  $L_g$  与曲面  $\Sigma_p$  的偏差

### 1.3 刀具曲面 $\Sigma_t$ 的包络面 $\Sigma_g$ 逼近 $\Sigma_p$ 时的误差

为了图示方便, 假定已从式(17)所示的包络曲面族中优选出刀具曲面包络面  $\Sigma_g$  如图 6 所示, 它必定与设计曲面  $\Sigma_p$  沿刀触点轨迹曲线  $L_p$  相切, 且两者在曲线  $L_p$  上的每一点沿任意方向的短程挠率和法曲率均相等.  $L_g$  是组成  $\Sigma_g$  的过  $L_p$  上任意点  $M$  的包络特征线,  $Q_g$  是其上任意一点, 过此点作曲面  $\Sigma_p$  的垂线交曲面  $\Sigma_p$  于  $Q_p$ . 那么,  $Q_g$  点处曲

面  $\Sigma_g$  相对曲面  $\Sigma_p$  的偏差  $\delta_k$  为

$$\delta_k N_p^{(p)} = \delta_k N_p(u_p, v_p) = Q_p Q_g = r_g^{(p)} - r_p^{(p)} = r_g \left( u_{tM}, v_{tM}, \frac{du_{tM}}{ds_p}, \frac{dv_{tM}}{ds_p}, s_p, v_t \right) - r_p(u_p, v_p) \quad (18)$$

其中,  $N_p(u_p, v_p)$  是曲面  $\Sigma_p$  上任意一点  $Q_p$  处单位法矢的矢量参数方程. 显然, 如果选定了点  $Q_g$ , 即按式(17)确定了矢量  $r_g^{(p)}$ , 则式(18)所表达的 3 个标量方程可以求解参数  $u_p$ ,  $v_p$  和  $\delta_k$ , 并表示为

$$u_p = u_p \left( u_{tM}, v_{tM}, \frac{du_{tM}}{ds_p}, \frac{dv_{tM}}{ds_p}, s_p, v_t \right) \quad (19)$$

$$v_p = v_p \left( u_{tM}, v_{tM}, \frac{du_{tM}}{ds_p}, \frac{dv_{tM}}{ds_p}, s_p, v_t \right) \quad (20)$$

$$\delta_k = \delta_k \left( u_{tM}, v_{tM}, \frac{du_{tM}}{ds_p}, \frac{dv_{tM}}{ds_p}, s_p, v_t \right) \quad (21)$$

式(19)(20)确定了刀具曲面包络面  $\Sigma_g$  上任意一点  $Q_g$  的曲纹坐标  $(s_p, v_t)$  与设计曲面  $\Sigma_p$  的点  $Q_p$  曲纹坐标  $(u_p, v_p)$  之间的映射关系, 而式(21)又确定了点  $Q_g$  和  $Q_p$  之间的偏差  $\delta_k$ . 式(19)~式(21)实际上确定了实际加工曲面, 即刀具曲面的包络曲面  $\Sigma_g$  与加工目标曲面, 即设计曲面  $\Sigma_p$  之间的映射关系, 为刀具曲面的包络曲面族(空间)  $\Sigma_g$  逼近加工目标曲面  $\Sigma_p$  打下了理论基础. 至此, 完整阐述了刀具曲面  $\Sigma_t$  通过运动变换  $\Psi$  逼近设计曲面  $\Sigma_p$  的包络逼近原理. 下面将应用曲面包络逼近原理, 分别以加工效率最高和加工误差最小为优化目标, 获得优化的刀具运动.

## 2 非球面刀具宽行数控加工 2 类问题的数学模型

在宽行数控加工的工程实践中, 加工精度和加工效率的控制问题始终是数控加工技术领域的 2 类核心问题. 其中, 数控加工的精度(误差)计算和控制问题可以由式(21)来解决; 而数控加工的效率的计算和控制问题与数控加工的行宽的计算有关, 但行宽不是一个规范正式的数学概念. 下面先将数控加工中的行宽定义为一种曲面的内蕴运动不变量, 并给出其计算方法; 然后以数控加工的

精度和效率最优为目标, 建立刀具运动的优化控制模型.

### 2.1 数控加工中行宽的定义和计算方法

图 7 所示为单触点宽行加工复杂曲面的情形, 在任意刀触点  $M$  处, 刀具曲面展成包络面(特征线)  $L_g$ . 对于刀具曲面包络面  $\Sigma_g$ , 在刀触点轨迹线上  $L_p$  的每一个刀触点  $M$  处(曲纹坐标为  $(s_p, v_{tM})$ )都有唯一的  $s_p$  坐标值, 并对应唯一的包络特征线  $L_g$ , 即曲面  $\Sigma_g$  的  $v_t$  线. 设  $Q_g^{(1)}$  和  $Q_g^{(2)}$  是包络特征线  $L_g$  上分别位于刀触点  $M$  的两侧的两点, 其对应的曲纹坐标可分别设为  $(s_p, v_{tM} + v_{t1})$  (位于点  $M$  的右侧  $v_{t1} \geq 0$ ),  $(s_p, v_{tM} - v_{t2})$  (位于点  $M$  的左侧  $v_{t2} \geq 0$ ), 曲线  $L_{gp}$ 、点  $Q_p^{(1)}$  和  $Q_p^{(2)}$  分别是曲线  $L_g$ , 点  $Q_g^{(1)}$  和  $Q_g^{(2)}$  在曲面  $\Sigma_p$  上的投影. 若  $L_g$  上点  $Q_g^{(1)}$  和  $Q_g^{(2)}$  之间的各点到曲面  $\Sigma_p$  的距离  $\delta_k$  均不大于指定误差  $\varepsilon$ , 那么, 曲面  $\Sigma_p$  上的曲线  $L_{gp}$  在点  $Q_p^{(1)}$  和  $Q_p^{(2)}$  之间的弧长  $s_p^{(1)(2)}$  就是宽行加工中在误差  $\varepsilon$  下刀具位于刀触点  $M$  处展成曲面时的所谓行宽, 显然, 必须在指定加工精度的条件下才能度量行宽. 当指定加工误差  $\delta_k \leq \varepsilon$  时, 刀具在每个刀触点  $M$  处展成曲面时的行宽并不相等.

如图 7 所示, 曲线  $L_{gp}$ 、点  $Q_p^{(1)}$  和  $Q_p^{(2)}$  分别是曲线  $L_g$ 、点  $Q_g^{(1)}$  和  $Q_g^{(2)}$  在曲面  $\Sigma_p$  上的投影, 这种投影关系实际是由式(19)(20)确定的. 曲面  $\Sigma_g$  任意一点  $Q_g$  (当然包括点  $Q_g^{(1)}$  和  $Q_g^{(2)}$ ) 在曲面  $\Sigma_p$  上的投影点  $Q_p$  ( $Q_p^{(1)}$  和  $Q_p^{(2)}$ ) 的曲纹坐标可由式(19)(20)计算, 而将式(19)(20)代入设计曲面  $\Sigma_p$  的参数方程  $r_p = r_p(u_p, v_p)$  中, 即得到曲面  $\Sigma_g$  在曲面  $\Sigma_p$  上的投影的方程

$$r_{gp} = r_{gp}(u_{tM}, v_{tM}, \frac{du_{tM}}{ds_p}, \frac{dv_{tM}}{ds_p}, s_p, v_t) = r_p \left( u_p(u_{tM}, v_{tM}, \frac{du_{tM}}{ds_p}, \frac{dv_{tM}}{ds_p}, s_p, v_t), v_p(u_{tM}, v_{tM}, \frac{du_{tM}}{ds_p}, \frac{dv_{tM}}{ds_p}, s_p, v_t) \right) \quad (22)$$

其中, 固定参数  $s_p$  不变, 则得到曲线  $L_{gp}$  的参数方程. 故曲线  $L_{gp}$  在点  $Q_p^{(1)}$  和  $Q_p^{(2)}$  之间的弧长  $s_p^{(1)(2)}$ , 即行宽为

$$s_p^{(1)(2)} = \int_{v_{tM}-v_{t2}}^{v_{tM}+v_{t1}} \left| \frac{\partial r_{gp}}{\partial v_t} \right| dv_t \quad (23)$$

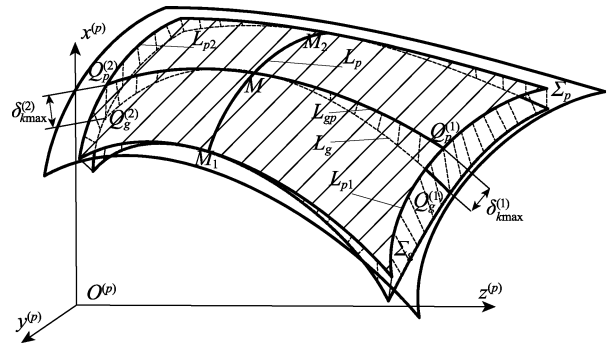


图 7 宽行数控加工的 2 类问题的数学模型

实际加工中, 设计曲面  $\Sigma_p$  的曲纹坐标  $(u_p, v_p)$  通常是正交的. 在这种情况下, 式(23)可以简化为

$$s_p^{(1)(2)} = \int_{v_{tM}-v_{t2}}^{v_{tM}+v_{t1}} \sqrt{E_p \left( \frac{\partial u_p}{\partial v_t} \right)^2 + G_p \left( \frac{\partial v_p}{\partial v_t} \right)^2} dv_t \quad (24)$$

其中,  $E_p = \frac{\partial r_p}{\partial u_p}$ ,  $G_p = \frac{\partial r_p}{\partial v_p}$ , 它们是曲面  $\Sigma_p$  的第一类基本量. 当宽行加工的误差指定不能超过  $\varepsilon$  时, 由式(21)可知, 式(23)(24)的积分上下界中的  $v_{t1}$  和  $v_{t2}$  分别是方程

$$\delta_k(u_{tM}, v_{tM}, \frac{du_{tM}}{ds_p}, \frac{dv_{tM}}{ds_p}, s_p, v_{tM} + v_{t1}) = \varepsilon \quad (25)$$

$$\delta_k(u_{tM}, v_{tM}, \frac{du_{tM}}{ds_p}, \frac{dv_{tM}}{ds_p}, s_p, v_{tM} - v_{t2}) = \varepsilon \quad (26)$$

的解(如图 7 所示). 其中,  $\varepsilon$  是加工所要求的加工误差. 这样, 行宽被定义为设计曲面  $\Sigma_p$  上的曲线弧长, 并按式(23)计算. 但由于刀具在每个刀触点  $M$  处展成曲面时的行宽并不相等, 因此它无法作为刀具运动整体优化的目标函数.

### 2.2 以效率为目标的刀具运动优化模型

在工程实践中, 与前文所述曲面逼近问题相关的复杂曲面单触点数控加工问题主要有 2 类: 第 1 类以加工效率最高为目标. 如图 7 所示, 给定实际加工曲面(刀具曲面包络面  $\Sigma_g$ )和设计曲面  $\Sigma_p$  的误差要求  $\delta_k \leq \varepsilon$ , 在满足此偏差要求的条件下, 通过确定恰当的运动变换  $\psi$  使刀具曲面包络面  $\Sigma_g$  在最大范围内逼近设计曲面  $\Sigma_p$ , 即加工效率最高问题. 这类问题的数学模型描述如下:

由于满足精度条件  $\delta_k \leq \varepsilon$  时, 刀具在每个刀触点  $M$  处展成曲面时的行宽不可能都相等, 因此分别以每个刀触点处的行宽最大为优化目标, 确定的刀具运动将可能不连续, 无法在实际加工中实现. 但是, 以所有刀触点处的行宽范围内曲线

$L_{gp}$  的集合所形成的曲面面积(如图 7 阴影部分所示)最大为优化目标, 可确保获得连续光滑的刀具运动<sup>[18]</sup>. 于是, 在给定两曲面的误差要求  $\delta_k \leq \varepsilon$  的情况, 刀具曲面包络面  $\Sigma_g$  以最大投影面积逼近设计曲面  $\Sigma_p$  为目标的最优化问题数学模型的目标函数为

$$S = \max \left( \int_{s_{p1}}^{s_{p2}} ds_p \int_{v_{IM}-v_{I2}}^{v_{IM}+v_{I1}} ([(r_{gp})_{v_i} \cdot (r_{gp})_{v_i}] - [(r_{gp})_{s_p} \cdot (r_{gp})_{s_p}] - [(r_{gp})_{v_i} \cdot (r_{gp})_{s_p}]^2)^{1/2} dv_i \right) \quad (27)$$

其中,  $(r_{gp})_{v_i} = \frac{\partial r_{gp}}{\partial v_i}$ ,  $(r_{gp})_{s_p} = \frac{\partial r_{gp}}{\partial s_p}$ ;  $s_{p1}$  和  $s_{p2}$  分别是刀触点轨迹起始点  $M_1$  和终点  $M_2$  的弧长坐标.

为了保证曲面  $\Sigma_g$  从目标曲面  $\Sigma_p$  的外侧逼近目标曲面  $\Sigma_p$ , 避免过切(rear gouging)破坏, 需加上约束条件

$$\delta_k = \delta_k(u_{IM}, v_{IM}, \frac{du_{IM}}{ds_p}, \frac{dv_{IM}}{ds_p}, s_p, v_i) \geq 0 \quad (28)$$

式(25) (26) (28)构成此类优化模型的约束条件.

### 2.3 以精度为目标的刀具运动优化模型

复杂曲面单触点数控加工的第 2 类问题是以加工误差最小为目标. 如图 7 所示, 在设计曲面  $\Sigma_p$  上给定曲面边界  $L_{p1}$  和  $L_{p2}$ , 要求在该边界内, 通过确定恰当的运动变换  $\psi$  使刀具曲面包络面  $\Sigma_g$  以最小误差逼近设计曲面  $\Sigma_p$ , 即加工精度最高问题. 这类问题的数学模型描述如下:

设点  $Q_p^{(1)}$  和  $Q_p^{(2)}$  是位于  $L_p$  两侧的设计曲面  $\Sigma_p$  边界上  $L_{p1}$  和  $L_{p2}$  的任意 2 个点, 设计曲面  $\Sigma_p$  在点  $Q_p^{(1)}$  和  $Q_p^{(2)}$  处的法线分别交包络面  $\Sigma_g$  于点  $Q_g^{(1)}$  和  $Q_g^{(2)}$ , 曲面  $\Sigma_g$  在其任意点与目标曲面  $\Sigma_p$  的偏差可由式(18)求得. 对于单点切触的加工方式, 沿包络特征线  $L_g$  各点处曲面  $\Sigma_g$  与设计曲面  $\Sigma_p$  的偏差随该点到刀触点的距离的增加而单调增加, 其中, 设计曲面  $\Sigma_p$  边界上的 2 点  $Q_p^{(1)}$  和  $Q_p^{(2)}$  所对应的偏差  $\delta_{k \max}^{(1)}$  和  $\delta_{k \max}^{(2)}$  最大(如图 7 所示). 只有同时控制  $\delta_{k \max}^{(1)}$ ,  $\delta_{k \max}^{(2)}$  最小, 才能保证曲面  $\Sigma_g$  逼近目标曲面  $\Sigma_p$  的精度最高. 但是, 每一条特征线对应的  $\delta_{k \max}^{(1)}$ ,  $\delta_{k \max}^{(2)}$  是不相同的, 若逐一控制每一条特征线对应的  $\delta_{k \max}^{(1)}$  +  $\delta_{k \max}^{(2)}$ , 使之最小, 满足控制条件的刀具运动

将可能是不连续光滑的. 因此, 为得到连续光滑的刀具运动, 应该以偏差  $\delta_{k \max}^{(1)}$  和  $\delta_{k \max}^{(2)}$  分别沿曲面边界  $L_{p1}$  和  $L_{p2}$  的平均值之和最小为优化目标. 故包络面  $\Sigma_g$  逼近目标曲面  $\Sigma_p$  的最优模型如下:

目标函数

$$F = \min \left( \frac{\int_{L_{p1}} \delta_{k \max}^{(1)} ds_{p1}}{\int_{L_{p1}} ds_{p1}} + \frac{\int_{L_{p2}} \delta_{k \max}^{(2)} ds_{p2}}{\int_{L_{p2}} ds_{p2}} \right) \quad (29)$$

约束条件

$$\delta_k = \delta_k(u_{IM}, v_{IM}, \frac{du_{IM}}{ds_p}, \frac{dv_{IM}}{ds_p}, s_p, v_i) \geq 0 \quad (30)$$

约束条件式(30)保证曲面  $\Sigma_g$  从设计曲面  $\Sigma_p$  的外侧逼近设计曲面  $\Sigma_p$ , 避免产生过切现象. 式(29)中的  $s_{p1}$  和  $s_{p2}$  分别是边界曲线  $L_{p1}$  和  $L_{p2}$  的弧长坐标.

通过求解由式(25)~式(28)或式(29)(30)构成的优化模型可以确定函数  $u_{IM}(s_p)$  和  $v_{IM}(s_p)$ , 从而由式(7)(8)得到满足优化目标的连续光滑的刀具相对工件的运动方程和变换矩阵方程.

必须指出, 式(27)或式(29)描述的优化模型是一类以函数  $u_{IM}(s_p)$  和  $v_{IM}(s_p)$  及其一阶导数  $\frac{du_{IM}}{ds_p}$ ,  $\frac{dv_{IM}}{ds_p}$  为待定函数的泛函极值模型, 而不是函数极值模型. 在满足刀具包络曲面与设计曲面逼近的插值条件后, 可用于优化刀具相对工件运动, 控制刀具包络曲面与设计曲面整体误差的变量用于确定刀位的 2 个函数  $u_{IM}(s_p)$  和  $v_{IM}(s_p)$ , 即包络运动  $\psi$  下的刀触点轨迹线  $L_p$  在刀具曲面  $\Sigma_t$  上的共轭曲线, 这种共轭关系实际上确定了每个瞬时刀具与工件(设计曲面)的相对位置, 是上述运动优化模型的实质. 由泛函分析的有界线性算子理论, 可以证明满足式(27)或式(29)的函数  $u_{IM}(s_p)$  和  $v_{IM}(s_p)$  是连续光滑的<sup>[18]</sup>. 从而, 保证由此确定的刀具相对工件的运动方程和变换矩阵方程也是连续光滑的.

必须说明的是, 上述复杂曲面宽行加工的泛函极值模型主要适合于单调凸(或凹)的大型敞口平坦曲面且加工误差和行宽要求较小的情形, 对于既凹又凸的复杂曲面, 则可以将该曲面划分为单调凸和单调凹 2 个部分, 分别按上述方法进行处理. 对于曲面加工问题中出现的其他复杂情形, 如刀具曲面干涉(global collision)、加工误差或行宽

出现畸变(非均匀)等, 则需根据实际情况, 在前述泛函极值模型中增加相应的约束条件, 但本文所述曲面自然活动标架下以曲面运动不变量描述和控制刀具相对工件运动的方法仍可适用. 限于篇幅, 在此不再赘述.

### 3 仿真实例

例 1. 以一螺旋桨叶片曲面为例, 在 Matlab 上进行模拟加工, 并将计算结果与文献[7]中的加工方法(二阶泰勒逼近法)进行比较, 验证包络逼近原理的有效性和精确性.

设计曲面  $\Sigma_p$  (螺旋桨叶片) 以离散点拟合为自由曲面, 如图 8 所示 \* 型线表示刀触点轨迹线  $L_p$ , 即为包络逼近的插值条件: 按本文方法得到的刀具包络面  $\Sigma_g$  与  $\Sigma_p$  沿刀触点轨迹曲线  $L_p$  相切, 且两者在曲线  $L_p$  上的每一点沿任意方向的短程挠率和法曲率均相等(插值条件);  $L_p$  两侧的 \* 型线分别表示取定的宽行加工区域的边界线  $L_{p1}$  和  $L_{p2}$ , 它们是设计曲面  $\Sigma_p$  上与刀触点轨迹线等距的 2 条参数曲线, 其距离弧长(即行宽)12.23 mm. 圆锥曲面刀具半锥角  $\phi = 22.5^\circ$ , 底圆半径  $R = 150$  mm, 高度  $H = 32$  mm, 为了最大限度地降低加工误差, 这些刀具曲面参数是按如下方式获得的: (1) 避免刀具曲面与设计曲面局部干涉; (2) 刀具曲面的中间点与设计曲面  $\Sigma_p$  在刀触点轨迹线  $L_p$  的中间(感兴趣)点  $M$  处相切时, 刀具曲面与设计曲面偏差最小. 图 9 所示为模拟加工的结果, 图 10 所示为加工时刀触点  $M$  附近的情形: 包络特征线  $L_g$  与刀触点轨迹线  $L_p$  及其在刀具表面上的共轭线  $L_l$  相交于刀触点  $M$ , 表明刀具与工件在宽行加工过程中处于正确的相对位置. 图 11 所示为沿取定的加工区域边界线  $L_{p1}$  和  $L_{p2}$  刀具包络曲面对设计曲面的误差变化, 表明在取定的边界线上每一点加工误差都是不同的; 同一刀位在 2 条边界线上的加工误差一般不能保证同时最小, 但两者之和却变化不大. 图 12 以拓扑图的形式显示了在取定的宽行加工区域内二阶泰勒逼近法<sup>[7]</sup>和曲面包络逼近法得到的刀具包络曲面与设计曲面之间的误差分布. 图 13 比较了在相同的加工误差( $\epsilon = 0.01$  mm)情况下, 2 种方法沿相同的刀触点轨迹展成设计曲面时的加工带宽的变化. 图 12 和图 13 表明, 与二阶泰勒法相比, 在相同的加工误差和加工范围要求下, 包络逼

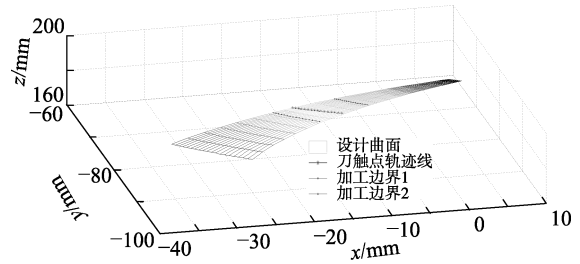


图 8  $\Sigma_p$  和  $L_p$  及取定的加工区域边界线  $L_{p1}$  和  $L_{p2}$

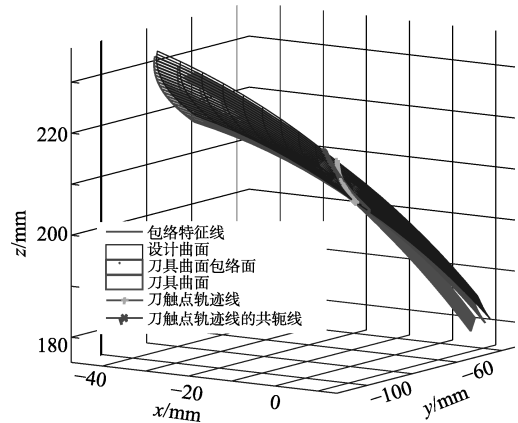


图 9 模拟加工的结果

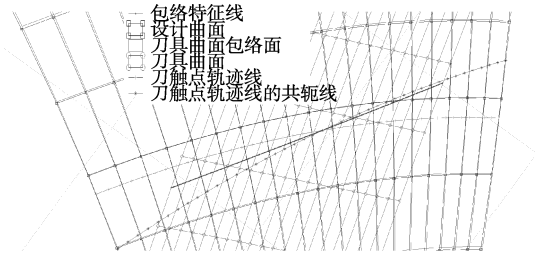


图 10 放大后刀触点附近的情形

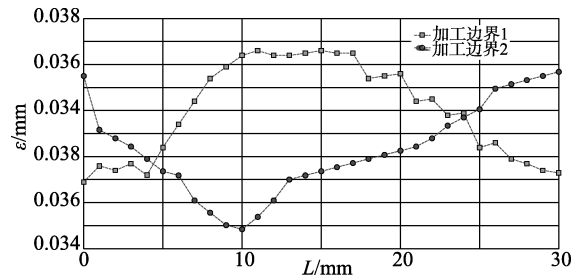


图 11 沿  $L_{p1}$  和  $L_{p2}$  刀具包络曲面对设计曲面的误差

近法在加工行宽和精度方面提高明显. 这主要是因为二阶泰勒法对设计曲面采取了二阶近似, 将其在刀触点附近的曲面结构统一近似表达为椭圆抛物面, 没有真实地考虑刀触点以外行宽区域内曲面实际的逼近情况; 而包络逼近法完全按照设计曲面的真实几何结构, 在刀触点轨迹线上满足插值条件的基础上, 精确计算刀具包络曲面与设计曲面

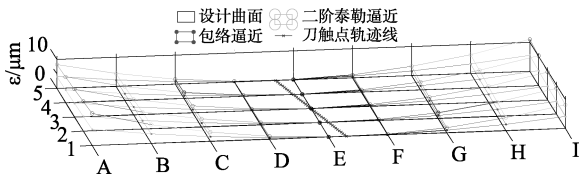


图 12 包络逼近法和二阶泰勒逼近法加工得到曲面与设计曲面的误差分析拓扑图

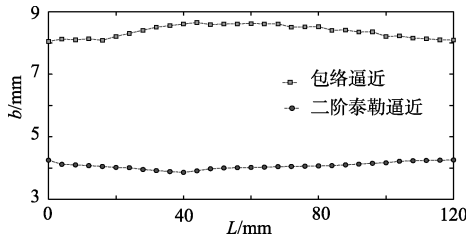


图 13  $\varepsilon = 0.01 \text{ mm}$  下 2 种方法行宽比较

在刀触点轨迹以外区域的误差; 并以误差最小或行宽最大为目标确定刀具相对工件的运动, 加之刀具曲面的结构参数也是按与所加工的曲面偏差最小的原则来设计和确定. 因此, 包络逼近法较二阶泰勒法在加工精度和效率方面具有明显的优势.

例 2. 通过文献[9]中的一个圆环刀具加工螺旋面的仿真算例, 验证曲面包络逼近法的正确性和有效性. 该螺旋面的参数方程为

$$S(u, v) = \begin{bmatrix} u \cos v - \left( a + u \sqrt{\frac{a+u}{a-u}} \right) \sin v \\ u \sin v + \left( a + u \sqrt{\frac{a+u}{a-u}} \right) \cos v \\ -pv \end{bmatrix} \quad (31)$$

其中,  $-6 \text{ mm} \leq u \leq 8 \text{ mm}, 0 \leq v \leq 1$ .

螺旋面参数为  $a=10 \text{ mm}, p=100 \text{ mm}$ , 选定  $u=-2$  所确定的参数曲线为刀触点曲线. 设计曲面及其刀触点轨迹线如图 14 所示, 其中, 圆环刀的环心圆半径  $R=10 \text{ mm}$ , 圆角半径为  $2.5 \text{ mm}$ . 图 15 所示为是按包络逼近法确定的刀位和姿态加工设计曲面的仿真结果.

为验证本文方法的加工精度和加工效率, 首先按第 1 类优化模型(即以行宽最大为优化目标)分别计算给定加工误差为  $\varepsilon=0.005 \text{ mm}$  和  $\varepsilon=0.01 \text{ mm}$  时的最大加工行宽, 并与已有的加工方法进行比较. 计算结果表明, 在满足加工误差为  $\varepsilon=0.01 \text{ mm}$  的情况下, 当刀触点位于被加工的螺旋曲面曲纹坐标(2, 0.376)处, 刀轴在被加工曲面坐标系中的方向为(0.937 4, 0.281 1, -0.205 7)时行宽最大, 其值为  $6.63 \text{ mm}$ . 在满足加工误差为  $\varepsilon=0.005 \text{ mm}$  的情况下, 当刀触点位于被加工的螺旋曲面曲纹坐

标(2, 0.563)处, 刀轴在被加工曲面坐标系中的方向为(0.896 8, 0.330 1, -0.245)时行宽最大, 其值为  $5.87 \text{ mm}$ . 然后, 按第 2 类优化模型(即以加工误差最小为优化目标)在刀触点轨迹线两侧选定行宽  $6.07 \text{ mm}$  的加工区域, 设定加工区域边界(图 14 所示的  $u=-0.5$  和  $u=-4.5$  曲线), 并沿加工区域边界计算展成各刀触点时刀具包络面与设计曲面的偏差. 图 16 所示为沿 2 条边界各点, 刀具包络面与设计曲面的偏差变化情况.

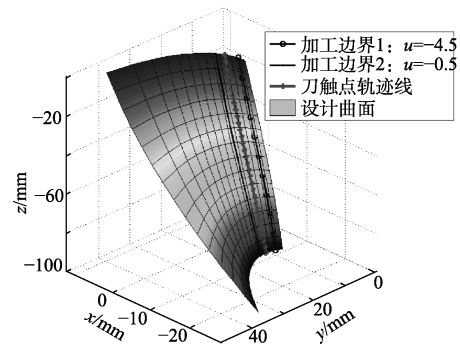


图 14 设计曲面及其上的刀触点轨迹线和加工边界

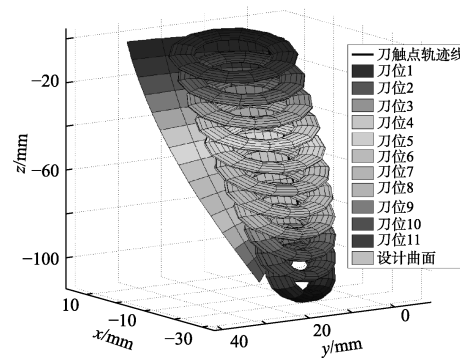


图 15 仿真加工中刀具的刀位和姿态

表 1 所示为用球头刀和环面刀在不同刀位规划下加工上述曲面时的加工带宽. 可以看出, 在同样的加工精度、适当的刀位规划下, 非球面的圆环面刀具加工带宽较球头刀的加工带宽要大得多, 显示了非球面刀具宽行加工的高效率. 综合表 1、图 15 和图 16 可以看出, 使用圆环面刀具的数控加工时, 包络逼近方法可以在给定的加工区域内

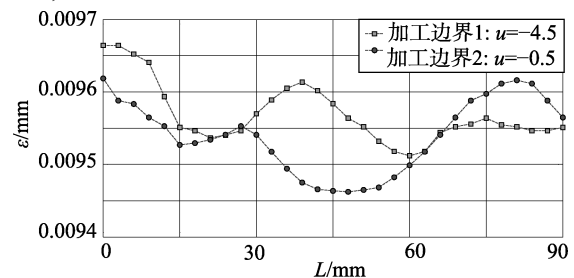


图 16 加工边界上刀具包络曲面与设计曲面的误差

表 1 球头刀及不同刀位规划下环面刀加工带宽 mm

方法	$\varepsilon$	
	0.01	0.005
球头刀 $R = 5.5\text{mm}$	0.98	0.69
二阶泰勒逼近 $\lambda = 25^\circ$	3.12	2.48
三阶泰勒逼近	6.14	5.28
包络逼近	6.63	5.87

实现刀具包络曲面与设计曲面的最佳逼近,且较已有的加工方法(如二阶或三阶泰勒逼近)具有更高的加工精度和加工效率。但是,与多点切触方式比较,该方法的效率要低一些,这是因为多点切触方式<sup>[5]</sup>允许有一定的过切的原因。

#### 4 结 语

本文基于微分几何的曲面自然活动标架理论,推导了多轴联动数控加工复杂曲面中刀具相对工件运动的通用规范描述方法,由刀具曲面和设计曲面运动不变量参数描述了刀具相对工件的包络运动。

本文提出曲面的包络逼近理论,将非球面刀具的多轴联动数控加工问题归结为刀具曲面在运动变换下,以简单(刀具)曲面(如平面、圆柱面、圆锥面和各种回转面及螺旋面等)上的定向曲面片(刀具包络面特征线上的微分流形)为样条曲线,按指定的插值条件(刀具包络面与设计曲面沿刀触点轨迹线在任意一点沿任意方向的短程挠率和法曲率均相等)和精度逼近加工目标曲面的曲面拟合问题;分别以加工效率和加工精度最优为目标,建立了能确保刀具相对工件运动连续光滑的刀位优化的泛函极值模型。该刀位优化模型能真实反映实际加工过程。

仿真算例结果表明,按本文方法控制刀具相对工件运动,沿刀触点轨迹的各刀位上的加工行宽和加工误差的变化是连续的,满足实际加工的要求;与二阶泰勒逼近的方法比较,本文方法能显著地提高加工精度和效率。

#### 参考文献(References):

- [1] Xi Guang, Wu Guangkuan, Zheng Jiansheng. Positioning algorithm for 5-axis machining of ruled surfaces based on radius and angle offset[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44(4): 92-96(Chinese)  
(席光, 吴广宽, 郑建生. 基于半径和角偏置的直纹面五坐标加工刀位生成算法[J]. 机械工程学报, 2008, 44(4): 92-96)
- [2] Wu Baohai, Wang Shangjin. 5-Axis flank machining sculptured surfaces based on signed Dupin indicatrix[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2007, 42(11): 192-196(in Chinese)  
(吴宝海, 王尚锦. 基于正向杜邦指标线的五坐标侧铣加工

- [J]. 机械工程学报, 2006, 42(11): 192-196)
- [3] Rao N, Bedi S, Buchal R. Implementation of the principal-axis method for machining of complex surfaces[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 1996, 11(4): 249-257
- [4] Li C G, Bedi S, Mann S. Flank milling of ruled surface with conical tools- an optimization approach[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2006, 29(11/12): 1115-1124
- [5] Warkentin A, Ismail F, Bedi S. Multi-point tool positioning strategy for 5-axis machining of sculptured surfaces[J]. Computer Aided Geometric Design, 2000, 17(1): 83-100
- [6] Chiou C J, Lee Y S. A machining potential field approach to tool path generation for multi-axis sculptured surface machining[J]. Computer Aided Design, 2002, 34(5): 357-371
- [7] Fan J H, Ball A. Quadric method for cutter orientation in five-axis sculptured surface machining[J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2008, 48(7/8): 788-801
- [8] Zhu L M, Ding H, Xiong Y L. Third order point contact approach for five-axis sculptured surface machining using non-ball end tools-Part I: third order approximation of tool envelope surface[J]. Science China Technological Sciences, 2010, 53(7): 1904-1912
- [9] Zhu L M, Ding H, Xiong Y L. Third order point contact approach for five-axis sculptured surface machining using non-ball end tools-Part II: tool positioning strategy[J]. Science China Technological Sciences, 2010, 53(8): 2190-2197
- [10] Zhu L M, Zheng G, Ding H, et al. Global optimization of tool path for five-axis flank milling with a conical cutter[J]. Computer-Aided Design, 2010, 42(10): 903-910
- [11] Zhu Limin, Lu Yaoan. Modeling swept envelopes of rotary cutting tools with application to five-axis flank milling[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(7): 176-183(in Chinese)  
(朱利民, 卢耀安. 回转刀具侧铣加工扫掠包络面几何造型及其应用[J]. 机械工程学报, 2013, 49(7): 176-183)
- [12] Gong H, Wang N. 5-axis flank milling free-form surfaces considering constraints[J]. Computer-Aided Design, 2011, 43(6): 563-572
- [13] Chen Zhitong, He Ying. An unified method for strip-width-maximization end milling machining tool path generation. China: 201310335002.1, 2013.11.27[P]. 2013-11-27 (in Chinese)  
(陈志同, 贺英. 一种宽行端铣加工刀轨生成统一方法. 中国: 201310335002.1, 2013.11.27[P]. 2013-11-27)
- [14] Chen Zhitong, Yue Yi, Xu Rufeng. A middle-point-error-control method in strip-width maximization-machining[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(1): 117-123(in Chinese)  
(陈志同, 乐毅, 徐汝锋. 中点误差控制宽行加工算法[J]. 机械工程学报, 2011, 47(1): 117-123)
- [15] Zou Qixiao, Dong Lei, Cao Lixin. Least square positioning method of flank milling for non-developable ruled surface[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2016, 22(3): 748-753 (in Chinese)  
(邹启晓, 董雷, 曹利新. 非可展直纹面侧铣加工的最小二乘刀位规划方法[J]. 计算机集成制造系统, 2016, 22(3): 748-753)
- [16] Dong Lei, Cao Lixin. Approximation method of tunnel surfaces with general cylindrical surfaces and its application in plunge milling of impellers[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2014, 35(8): 2331-2340(in Chinese)  
(董雷, 曹利新. 通道曲面的柱面逼近方法及其在叶轮插铣中的应用[J]. 航空学报, 2014, 35(8): 2331-2340)
- [17] Zhou Kaihong. Research on meshing characteristics-based design & CNC technology of point-contact spiral bevel gears tooth surface[D]. Changsha: Central South University, 2009: 54-63(in Chinese)  
(周凯红. 基于预定啮合特性的螺旋锥齿轮齿面齿面设计及 CNC 制造技术研究[D]. 长沙: 中南大学, 2009: 54-63)
- [18] Zeidler E. Applied functional analysis main principles and their applications[M]. Heidelberg: Springer, 1995: 167-279