不确定性可视化综述

雷　辉[1)]，陈海东[2)]，徐佳逸[2)]，吴向阳[3)]，陈　为[2)*]

[1)](长沙理工大学电气与信息工程学院　长沙　410004)

[2)](浙江大学 CAD & CG 国家重点实验室　杭州　310058)

[3)](杭州电子科技大学计算机学院　杭州　310018)

(chenwei@cad.zju.edu.cn)

摘　要：数据从采集到使用的过程不可避免地会引入不确定性.与数据错误和数据矛盾不同的是，不确定性存在于数据处理的各个环节，甚至各个环节会导致新的不确定性.作为数据不可或缺的组成部分，可视化不确定性有助于用户更加准确地分析和理解数据并做出正确的决策.文中简略地介绍了不确定性的基本来源；从不确定性的可视表达形式角度出发，梳理并总结了当前主流的不确定性可视化方法，包括图标法、可视变量编码法、几何体表达法和动画表达法；并探讨了需要进一步探索的研究方向.

关键词：不确定性；可视化；图标；可视变量；几何体；动画表达

中图法分类号：TP391

A Survey on Uncertainty Visualization

Lei Hui[1)], Chen Haidong[2)], Xu Jiayi[2)], Wu Xiangyang[3)], and Chen Wei[2)*]

[1)](*Department of Electronics and Information Engineering*, *Changsha University of Science and Technology*, *Changsha*　410004)

[2)](*State Key Laboratory of CAD & CG*, *Zhejiang University*, *Hangzhou*　310058)

[3)](*College of Computer Science*, *Hangzhou Dianzi University*, *Hangzhou*　310018)

Abstract: It is inevitable to bring about uncertainty during the process of data acquisition, derivation, and visualization. Different from data error and data conflict, uncertainty resides in and propagates along each stage of the visualization pipeline. Uncertainty is an important ingredient of data. Visualizing uncertainty can help the analysts gain insight into the data to make better decisions. In this paper, first we introduce the main sources of uncertainty; then we summarize the state-of-the-art uncertainty visualization approaches into four categories: glyph, visual variable encoding, geometry, and animation; at last we outline some directions requiring further studies.

Key words: uncertainty; visualization; glyph; visual variable; geometry; animation

不确定性(uncertainty)源于拉丁语 certus(确定的、固定的、已解决的)，是现代统计学的核心，在物理学、金融学、经济学等领域都涉及不确定性的概念，它常用于描述数据的可变性、噪声、不完整性、偏倚、误差、可信度等[1-2].

作为数据的重要组成部分，可视化不确定性有助于数据分析者更加全面地理解、分析数据，以便做出最佳决策.然而，不确定性可视化作为数据可视化的关键问题之一，迄今为止仍存在众多重要问题亟待解决，包括不确定性的清晰表示、降低或避免因

修改稿收到日期：2012-12-31. **基金项目**：国家自然科学基金(61232012，61003193)；国家“八六三”高技术研究发展计划(2012AA120903)；湖南省科技厅项目(2010GK3064).**雷　辉**(1977—)，女，硕士，讲师，主要研究方向为图像处理、可视化；**陈海东**(1987—)，男，博士，主要研究方向为科学计算可视化；**徐佳逸**(1991—)，男，学士，主要研究方向为科学计算可视化；**吴向阳**(1975—)，男，博士，副教授，主要研究方向为科学可视化；**陈　为**(1976—)，男，博士，教授，论文通讯作者，主要研究方向为科学可视化、信息可视化、可视分析等.

不确定性可视化所带来的视觉混乱，以及对确定性数据可视化结果的负面影响和不确定性表达的可视隐喻.

近年来，在可视化研究领域内，学者们提出了一系列不确定性可视化及分析方法，概括地讲，这些方法可分为 4 大类：图标法、可视变量编码法、几何体表达法和动画表达法. 图标法简单、易于理解，却极易引起视觉混乱等问题. 可视变量编码法非常直观，但需要精心选择合适的可视变量作为不确定性的编码载体. 几何体表达法可用于表达高维不确定性，但其通常会在引入不确定性可视化结果的同时污染确定性数据的可视化结果. 相比于静态不确定性可视化方法，动画表达法需要更长的理解曲线，且易引起视觉疲劳.

本文将详细介绍这 4 类主流的不确定性可视化方法，并探讨一些需要进一步深入研究的方向.

1　不确定性的来源

在真实世界中，不确定性无所不在. 数据的收集、变换和可视化过程中都存在不确定性，而且不确定性在可视化流水线的不同阶段不断传播，如图 1 所示[3-4].

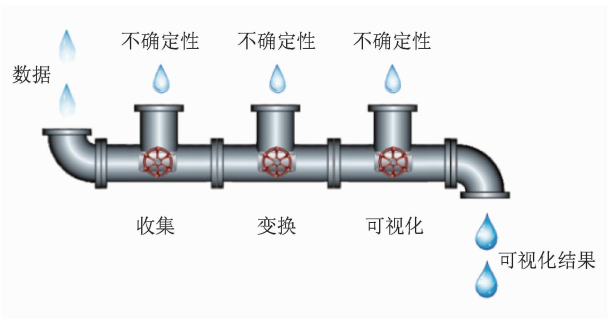


图 1　不确定性的来源

测量仪器的优劣和测量者知识水平的高低，都将给实际测量获得的数据带来极大的不确定性；同理，不同的仿真或数值计算模型也将引入一定的不确定性：即使同一数值计算模型，不同的参数设置也会引起数据的不确定性.

通常，在对原始数据进行可视化之前，需要对数据进行过滤、简化、采样等操作. 这些基本操作可能涉及简单的数据变换或复杂的处理算法，这将在一定程度上改变原始数据，产生潜在的不确定性.

事实上，现有的众多可视化方法本身存在一定的不确定性，如常用于向量场可视化的流线可视化方法：在输入向量场中布局一定量的种子点，再以种子点作为数值积分的初始条件，而种子点的布局和数值积分终止条件的设置都会影响最终的可视化结果，致使可视化结果伴随着不可避免的不确定性.

2　不确定性的可视化方法

早期，统计学家作为不确定性可视化的先驱者发明了众多不确定性可视化方法，如误差条图、盒须图等. 2003 年 Jonhson 等[5] 明确指出，不确定性可视化是可视化的十大核心研究问题之一. 自此，可视化领域内的学者和专家提出了众多新的不确定性可视化方法，如流场雷达图(flow radar glyph)、基于视觉变量编码的不确定性可视化方法等.

根据不确定性的可视表达形式的不同，现有的不确定性可视化方法可大致分为 4 大类：图标法、可视变量编码法、几何体表达法和动画表达法. 图标法首先将不确定性编码为基本图标，再将图标在数据场上进行标示和布局，直接表达不确定性；可视化的各类视觉通道(如颜色、尺寸)亦可用于编码不确定性；几何体表达法则通过在可视化结果中引入代理性的几何体(如点、线、包围体等)表达不确定性；动画表达法则通过生成可视化结果序列，以动画的形式让观者发现其中的差异和运动，进而理解不确定性. 这些方法各自的优势和不足的详细比较如表 1 所示.

表 1　不确定性可视化方法比较

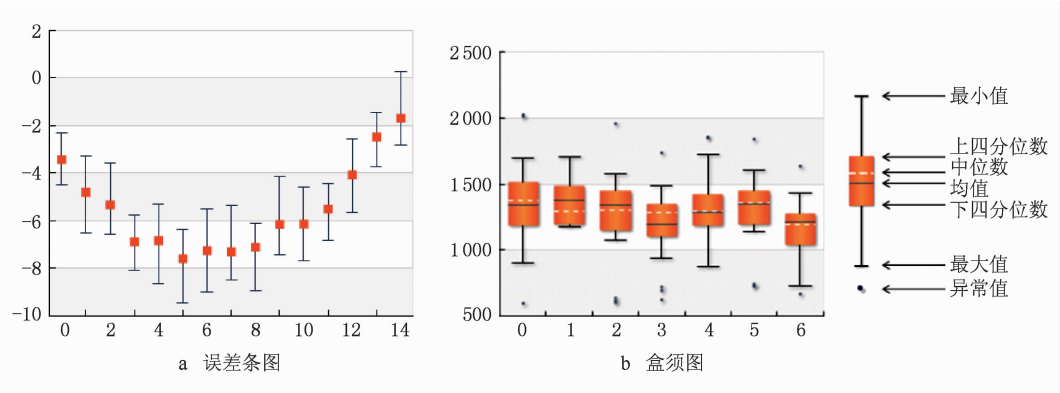
可视化方法	优势	不足
图标法	简单、易于理解	易产生视觉混乱等问题
可视变量编码法	可帮助用户迅速定位可视化结果中不确定性所在的区域和大小	需要精心选择可视变量才能有效地表达不确定性
几何体表达法	形象、直观；可编码高维不确定性	易污染原有的确定性数据的可视化结果
动画表达法	可帮助用户更加生动、形象地理解不确定性；提供了更高的自由度调节可视化结果	理解曲线较长；易引起视觉疲劳

2.1 图标法

图标法是一种简单的、非常易于理解的可视化方法，其核心思想甚至可追溯至远古文明时期，人类采用符号和图标进行日常交流的时代.

误差条(error bar)是一种简单的、直接的不确定性可视化方法，常用于可视化一维不确定性数据. 它由一系列带标记的线条组成，这些线条显式地表达了数据的统计信息，如图 2 a 所示. 在误差条图中，横轴通常用于表示数据实体，而纵轴则表示每个数据实体的统计特征. 在大多数情况下，纵轴至少由 3 个值组成，包括均值、下限误差值和上限误差值. 在实际使用过程中，可采用标准差或者分位数等定义上限误差值和下限误差值.

盒须图(box plot)[6-9]，又名箱型图，因其由一系列线和框组成而得名. 最基本的盒须图是一种五数统计图(五数统计是一种常用的数据分布特征描述方法，包括最小值、上四分位数、中位数、下四分位数和最大值)，其编码了数据的最基本的一阶统计特征. 变种的盒须图可编码更多数据统计特征，如图 2 b 所示. Potter 等进一步扩展了盒须图，提出用摘要图(summary plot)[10]可视化更多高阶统计特征，进而实现不确定性的可视化.



a 误差条图　　b 盒须图

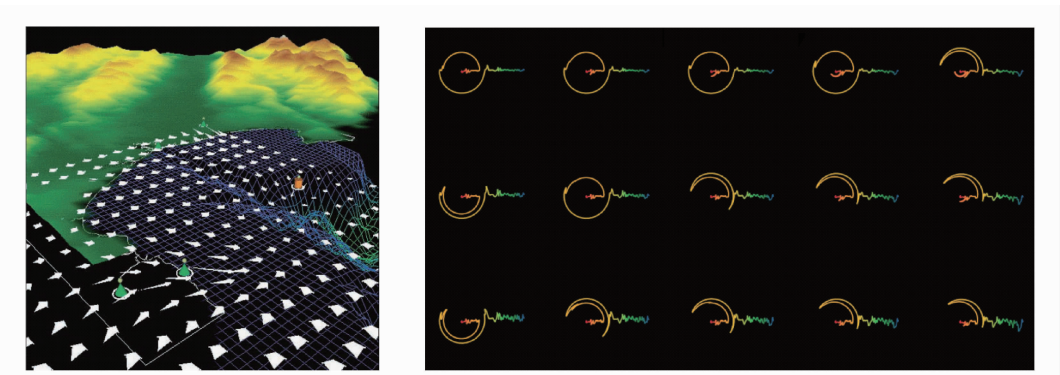
图 2 基于统计图标表达的可视化不确定性

误差条和盒须图是统计学家等专业用户常用的不确定性可视化方法. 然而，对于普通大众而言，这类方法的可视化结果不够直观；此外，它还需要用户准确理解所定义的数据的统计特征，尤其是一些高阶统计量.

对于二维确定性向量场，常用图标(如，箭头等)表示向量场中每个采样点的方向和大小等信息. 通过将更多的信息编码于这些图标，即可实现二维不确定性向量场可视化[11]. 如图 3 a[12]所示，采用箭头表示风场中每个采样点上风的方向，箭头的长度表示风的强度，箭头的宽度指示了风向的变化范围，也即风向的不确定性；其中纤细的箭头表明不确定性较小，而粗壮的箭头则说明不确定性较大.

流场雷达图[13]是一种非稳定流场的静态可视化方法，它允许用户在一个静态可视化结果中直接观察、对比和探索非稳定流场中与时间相关的现象和特征. 如图 3 b 所示，流场雷达图的半径被映射为非稳定流场的时间维度，并用颜色进行编码；而每个时刻点的流向则被编码为对应半径的偏转角度. 通过一个简单的径向映射，非稳定流场中每个采样点即可表示为一个流场雷达图.

高夹角分辨率扩散磁振成像(high-angular-resolu-



a 基于箭矢图表达的不确定性流场　　b 基于流场雷达图表示的非稳定流场

图 3 基于图标表达的不确定性向量场可视化结果

tion diffusion imaging，HARDI）技术是近年发展起来的一种新兴的磁共振成像技术，与弥散张量成像（diffusion tensor imaging，DTI）技术相比，该技术能捕获更多的细节信息，如纤维交叉等. 但是，该技术易受噪音、梯度脉冲数等因素的影响，致使 HARDI 数据具有极大的不确定性. 常用的取向分布函数（orientation distribution function，ODF）方法以图标的方式呈现了 HARDI 数据的确定性，但却无法刻画数据采集、可视化过程中的不确定性，Jiao 等[14]将其推广到了不确定性 HARDI 数据的可视化，该方法在数据场中每个采样点处定义一个分辨率为 256×256×256 大小的体，采用 Wild Bootstrap 方法生成一系列具有给定的声噪比的 HARDI 数据，并用一个 ODF 表示在每个采样点处的每份 HARDI 数据. 由于每个采样点处的多个 ODF 之间存在重叠，因此通过统计体中每个体素被 ODF 包含的数目，便可获得相应体素的置信度；并以该置信度为数据场，采用体绘制可直接获得描述不确定 HARDI 数据的 ODF 图标.

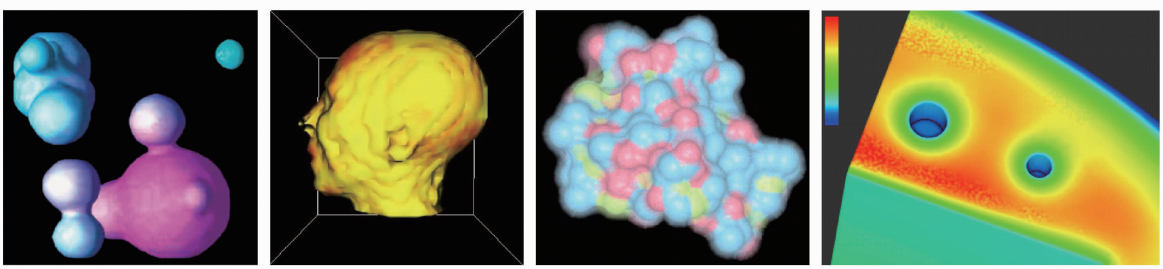
由于大量图标的布局会造成严重的视觉混乱，因此图标法比较适合稀疏不确定性数据的可视化.

2.2　可视变量编码法

以视觉变量作为不确定性编码的基本载体是众多不确定可视化方法的基本思想，基本的视觉标量包括位置、形状、亮度、颜色、方向、纹理等.

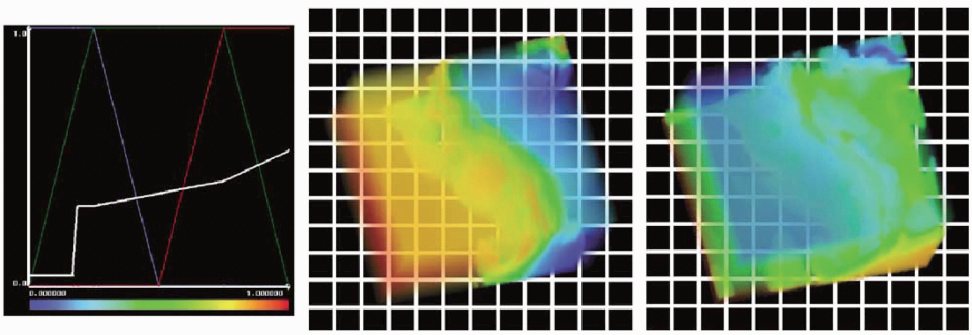
颜色是表达不确定性的常用可视变量之一. 通过将不确定性映射为不同的颜色，即可实现不确定性的可视编码[15-19]. 如图 4 a[15]所示，用青色表示低不确定性，洋红色表示高不确定性；图 4 b[16]展示了一个基于等值面表达的大脑磁共振数据可视化结果，其中黄色表示不确定性较低，而红色表示不确定性较高.

不透明度也可用于编码不确定性[20-22]，如图 5 所示；这类方法常采用颜色表示数据的均值，不透明度编码数据的不确定性. 图 5 b 中将平均盐度映射为颜色，不确定性映射为不透明度；图 5 c 中将平均温度映射为颜色，不确定性映射为不透明度.



a　采用颜色编码不确定性的面绘制结果　　b　采用颜色编码不确定性的等值面　　c　基于模糊表达　　d　基于噪声扰动

图 4　基于颜色和模糊表达的不确定性可视化



a　颜色映射函数　　b　基于体绘制的盐场　　c　基于体绘制的温度场

图 5　基于不透明度映射的不确定性可视化

谈及不确定性时，常会将噪音、模糊等词语与其联系，并且很自然地认为：确定性较高的区域，事物应该更加清晰、井然有序；反之，事物应比较模糊、杂乱无章.

基于以上事实，Lee 等[23]使用高斯分布建模原子的不规则运动，进而得到一个三维概率密度场，然后提取不同置信度下的等值面，并根据相应的置信度进行混合得到如图 4 c 所示最终的可视化结果，其中的模糊区域刻画了原子运动的不确定性. Coninx 等[24]采用数据的不确定性作为 Perlin 噪声合成的

控制量，以此对原始颜色映射施以相应的噪声扰动，实现不确定性的可视编码，其可视化结果如图 4 d 所示；其中过渡平滑的区域不确定性较低，包含噪音的区域不确定性较高.

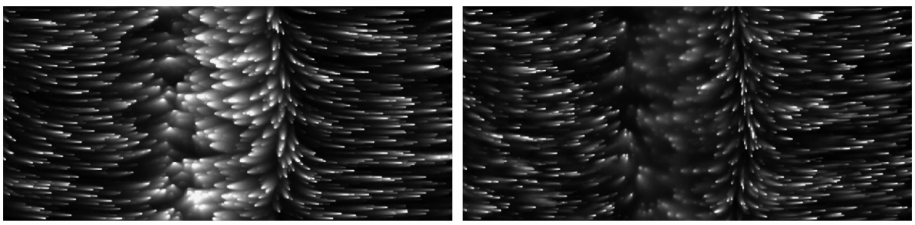
纹理是一个比较复杂的可视变量，它是颜色、尺寸、形状、方向等可视变量的综合体现. 狭义地讲，纹理指的是某种模式的空间分布频率，常用于类别型数据的可视化；纹理所包含细节信息的丰富程度会直接影响用户对可视化结果的理解.

Rhodes 等[16]采用不同粒度的纹理表示等值面上的不确定性，粒度较小的纹理（纯色）表示不确定性较低，相反则表示不确定性较高. Botchen 等[25-26]扩展了半拉格朗日纹理平流法，提出在属性场内进行误差滤波实现基于纹理合成的不确定性流场可视化. 其误差滤波的一般形式为

$$p_{\text{filtered}}(x) = \int_{V(x,v)} f(u,\tilde{x},v)\, p(x-\tilde{x})\, \mathrm{d}^n\tilde{x} \quad (1)$$

其中，$V(x,v)$表示滤波作用域，$f(\cdot)$是一个跟流向和不确定性 u 相关的核函数，通常 $n=2$. 使用不同的误差滤波核函数即可实现不同的基于纹理表达的不确定性流场可视化.

交叉平流法和误差弥散法是 2 种典型的实现，它们的可视化结果如图 6 所示，图中流场的中间部分具有更高的不确定性. 交叉平流法因其滤波的作用域位于一条和流向垂直交叉的直线上而得名；与交叉平流法不同的是，误差弥散法使用一个和流向无关的各向同性二维误差滤波核函数（如，二维高斯核函数）.



a 交叉平流法　　b 误差弥散法

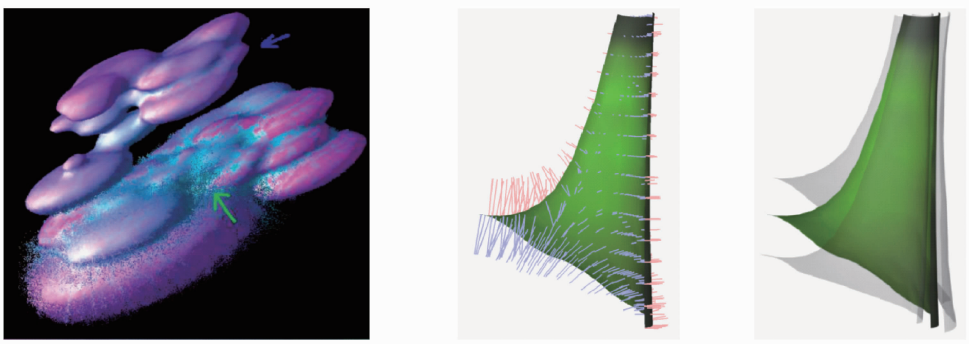
图 6 基于纹理表示的不确定性流场可视化结果

可视变量编码法是一种非常直接的不确定性可视化方法. 因为其采用可视变量作为不确定性的表达载体，因此，用户可以快速地定位可视化结果中不确定性所在的区域和大小. 然而，可视变量的选择往往与用户的心理和感知有着极大的联系；因此，实际应用中，需要精心选择合适的视觉变量编码不确定性.

2.3 几何体表达法

利用代理性几何物体可提供额外的视觉表达，借以表达数据的不确定性；常用的可表达不确定性的基本几何物体包括点、线、面、网格、体等. 在这类方法中，通过所引入几何体的布局或几何属性即可编码不确定性. 如图 7 a[15]所示，散点是新引入的几何体，点的密集程度表示不确定性：绿色箭头所指区域点布局非常密集，表示相应区域不确定较高；紫色箭头所指区域包含的点则非常稀疏，相应区域的不确定性较低. 图 7 b 和 7 c[27]分别展示了线和面 2 类代理几何表达不确定性的例子：图 7 b 采用线的长度表示给定置信区间下等值面的变动范围；图 7 c 采用 2 个半透明包围面表示等值面的变动范围.

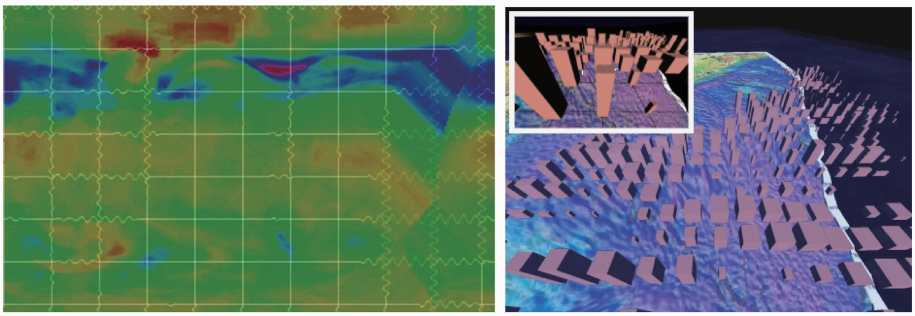
通常，点、线等简单几何体仅能编码一维不确定性. 采用网格表达可视化结果中的不确定性如图 8 a[28]所示：直线表示相应区域确定性较高，而曲线则表示



a 基于点　　b 基于线　　c 基于面

图 7 基于简单几何体表达的不确定性可视化结果

不确定性较高. 对于一些高维不确定性，则可以使用一些比较复杂的几何体进行表示，如图 8 b[29] 所示，采用立方体的 3 个轴编码三维不确定性的 3 个维度.



a　基于网格　　b　基于立方体

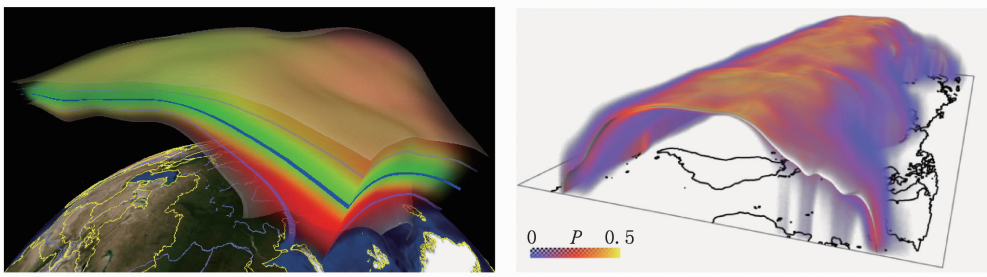
图 8　基于复杂几何体不确定性可视化结果

图 9 所示为采用包围体表达[30-32]的不确定性可视化结果，这类方法的主要步骤包括：

Step1. 将原始数据变换为一个概率场.

Step2. 设计传输函数或颜色映射对概率场进行颜色和透明度编码.

Step3. 通过体绘制或混合多个等值面的方式实现不确定性的可视化.



a　文献[30]　　b　文献[31]

图 9　基于包围体表达的不确定性可视化结果

数据分析是一个非常复杂的过程，它涉及对数据进行重采样、变换、相关性分析等步骤. 这些操作经常会产生一定的不确定性，且这些不确定性还会在整个分析过程中传播和演化，致使用户无法对分析结果的可靠性做出合理的判断. Wu 等[33]设计了一款考虑了不确定性的高维数据可视分析系统，其采用高维椭球建模高维数据的不确定性，通过椭球的合并和分离表达不确定性的合并、分离等演化规律；该系统的一个运行实例如图 10 所示[33]. 该系统采用历史图(history graph)存储用户的分析历史；其中，根节点是数据分析的起点，非根节点表示一个分析操作，节点之间边的宽度表示了操作的总体不确定性. 为了编码不确定性的传播规律，系统采用喇叭作为节点的可视隐喻，其分别编码了上一操作和下一操作的不确定性. 从图 10 可知，分析结果 B 较分析结果 A 可靠性更高，因为从根节点到结果 A 的路径上边的宽度更大.

在数值模拟等研究领域内，为了取得更高的计算精度，常常需要在不同的初始条件或参数配置下

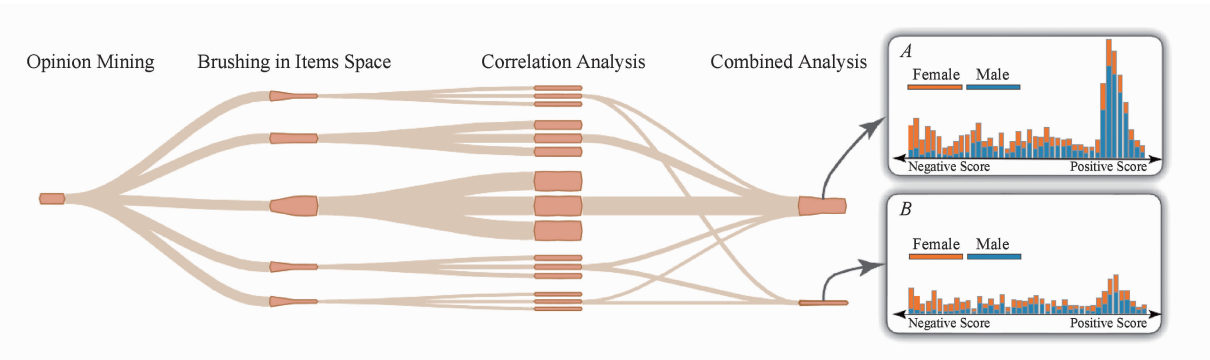
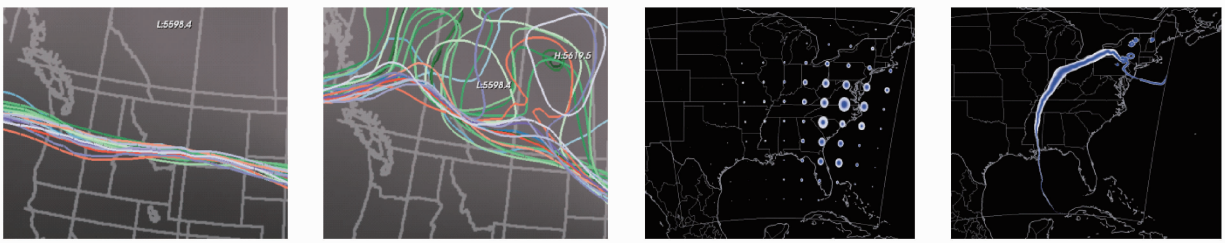


图 10　数据分析过程中不确定性的传播、演化等规律的可视化结果

多次运行同一数值计算模型或多个不同数值计算模型;多次模拟计算的结果称为集合数据(ensemble data),特定的一次模拟计算结果称为集合数据的一个成员,集合数据是研究不确定性的重要工具之一.

意大利面图(spaghetti plot)是一种经典的集合数据可视化方法,因其可视化结果类似于一盘杂乱的意大利面而得名.在气象研究领域,该方法有着广泛的应用,常用于可视化不同数值预报模型的预测结果.线是意大利面图的基本组成单元,代表一个集合数据成员的可视化结果.如图 11 a,11 b[34]所示,每条线代表从一个集合成员中提取的等值线;线的颜色编码了数值计算模型,线的杂乱程度间接地描述了集合数据的不确定性.相比于图 11 a 的可视化结果,图 11 b 具有更高的不确定性.



a 具有较低不确定性的意大利面图 b 具有较高不确定性的意大利面图 c 基于渐变不确定性图标表达 d 基于渐变不确定性丝带表达

图 11 集合数据可视化结果

Sanyal 等[35]介绍了一种基于渐变表达的集合数据不确定性可视化方法.给定包含 n 个成员的集合数据 $E=\{E_1,E_2,\cdots,E_n\}$,采用每个成员与均值之间差的绝对值 $D=\{D_1,D_2,\cdots,D_n\}$建模该集合数据的不确定性,并采用一系列相互叠加的同心圆表示 D,其中每个圆的半径 R_i 编码了 D_i.绘制时,为了避免出现遮挡,首先对所有圆按半径大小进行降序排序,以保证半径最大的圆最先被绘制,并使用一组顺序颜色对绘制顺序进行编码.由于绘制过程中使用的颜色是线性的,因此可视化结果呈渐变特性.图 11 c[35]展示了基于该表达法的可视化效果;其中,圆盘的面积越大,则表示相应位置处的集合数据的最大偏差越大;圆盘的蓝色核心越大,则说明相应位置处集合数据中的波动越大.

为了表达某等值线的不确定性,Sanyal 等[35]进一步扩展了该方法,采用渐变丝带表示其不确定性.丝带由一系列四边形组成,每个四边形则由等值线的 2 个相连圆的公共外切线与圆的 4 个交点组成.与渐变不确定性图标的绘制方法类似,该方法首先合并生成绘制由等值线上所有半径最大的圆定义的丝带,并采用顺序颜色编码绘制顺序,图 11 d[35]展示了其可视化结果.从图 11 结果中可以看出,丝带的宽度编码了等值线的不确定性,丝带越宽的区域不确定性越大;反之,则不确定性越小.

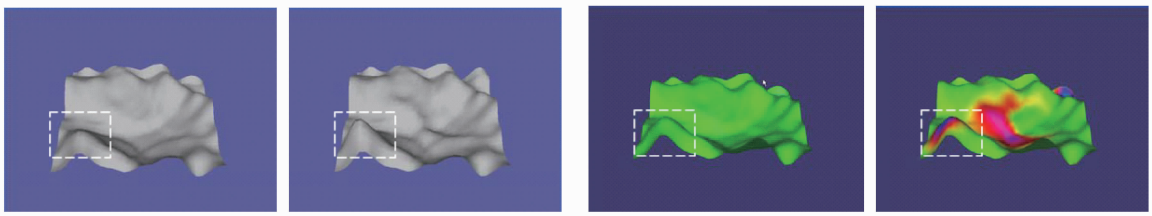
在一定程度上,几何体表达法与图标法有着一定的相似性,其可视化结果比较形象、直观、易于理解.较之图标法,这类方法还能表达高维不确定性,如图 8 b 所示;然而,它在引入代理几何体表示不确定性时,也极大地影响了原有的确定性数据的可视化结果.由图 8 可以看出,其中的网格线和立方体严重干扰了原有的可视化结果,用户会潜意识地认为这些几何体是数据的组成部分,而非不确定性的可视载体.

2.4 动画表达法

认知学的众多研究表明,在人类视觉系统的前注意处理过程(preattentive process)中,运动具有极高的处理优先级.因此,在可视化领域,动画成为众多数据的一种重要可视化形式.与其他方法相比,基于动画的不确定性可视化方法是一种基于动态信息表达方法,它要求用户持续关注可视化结果才能发掘数据中不确定性所在的区域、大小等信息.众多动画相关参数都可用于编码不确定性,如速度、持续时间、运动范围、运动顺序、运动模糊和闪烁等.

将不确定性隐式地编码于一个与时间相关的函数是众多动画表达法的基本思想,其中,可视化动画在时刻 t 时的关键帧代表在该时刻下引入不确定性 $u(t)$后的可视化结果.如图 12 a,12 b[36]所示,我们可将不确定性编码于一个与时间相关曲面形变函数,通过形状的变化表达不确定性.图 12 c,12 d[36]展示了一个将不确定性编码于一个和时间相关的颜色映射函数的可视化结果.图 13[37]则是将不确定性编码于一个与时间相关的传输函数的可视化结果,请注意对比图中用矩形标注区域之间的差异;事实上,这些差异即是数据不确定性的体现.

动画表达法可形象、生动地展现数据中的不确定性,然而,这类方法需要比静态可视化更长的理解



a　形变编码　　b　颜色编码

图 12　2 帧采用形变与颜色编码的不确定性可视化结果

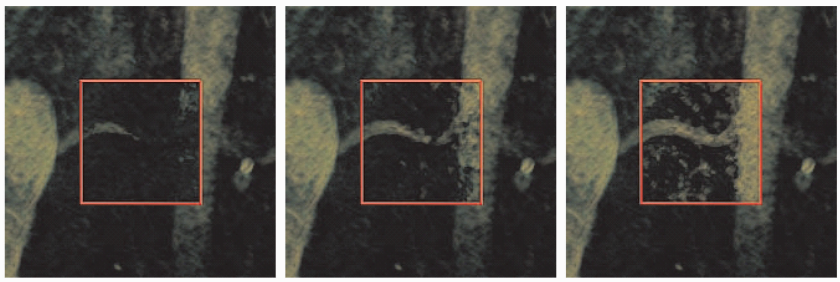


图 13　3 帧使用概率动画的医学数据体绘制结果

曲线；用户需要长时间、连续地查看动画，才能找到不同动画帧之间的差异性. 另外，动画中的跳动、闪烁等不确定性表达方式还容易引起视觉疲劳.

2.5　其他方法

平行坐标是一种常用的高维数据可视化方法，其核心思想是采用二维平面折线段表达高维数据. 然而，有限的屏幕空间和折线之间相互交叉现象致使用户在理解可视化结果时存在极大的不确定性. Dasgupta 等[38]对平行坐标中的不确定性进行了概括和分类；Peng 等[39]采用维度重排的方式来降低视觉混乱带来的不确定性；Artero 等[40]根据数据集的密度信息过滤其中的不重要数据项，在降低视觉混乱所带来的不确定性的同时，也保持了其中的重要结构；采用在屏幕空间或数据空间中聚类[40-43]的方式减少视觉混乱是另一类降低平行坐标不确定性的常用方法.

3　结论与展望

作为可视化研究的十大关键问题之一，不确定性的可视化已经引起了越来越多的学者的关注，分析者对不确定性可视化的需求也与日俱增. 有效的不确定性可视化方法可帮助分析者全面地分析、理解数据，进而做出最佳决策. 本文对当前主流的不确定性可视化方法：图标法、可视变量编码法、几何体表达法和动画表达法进行了梳理和总结. 自 2003 年将不确定性可视化作为可视化研究的一大挑战以来，经过 10 年的发展，它取得了良好的进展，但还有许多问题值得进一步的研究，其中包括：

1）参数空间分析和不确定性可视化. 传统的不确定性可视化方法着重于如何表达结果数据中的不确定性，因此，常常会忽略不确定性的来源和原因的分析与可视化. 参数作为众多数值模拟模型不确定性的一个重要来源，对其进行可视化和分析可帮助领域用户设计和理解相应的物理模拟.

2）不确定向量场拓扑结构可视化及分析. Otto 等[44-45]的前瞻性研究工作表明，不确定性向量场拓扑结构的可视化及分析是一个重要的研究问题.

3）高维不确定性数据的可视化. 简单地将一维不确定性数据的可视化方法推广至高维数据，存在很多缺陷和不足. 因为高维数据的各维度之间通常是相互关联的，且各个维度的重要性也并不一致.

4）张量场数据不确定性可视化. 张量场数据的可视化本身就是一项极具挑战的研究问题；然而，在实际使用中，张量场数据（如 DTI，HARDI 数据）的可视化极易受到数据噪音、可视化方法等因素的影响，致使可视化结果存在极大的不确定性. 如何建模和可视化张量场数据的不确定性值得我们进一步深入研究.

参考文献（References）：

[1] Wilkinson L, Wills G. The grammar of graphics [M]. Heidelberg: Springer, 2005

[2] Taylor B N, Kuyatt C E. Guidelines for evaluating and expressing the uncertainty of NIST measurement results [M]. Darby, PA: DIANE Publishing, 1994

[3] Lodha S K, Pang A, Sheehan R E, *et al*. UFLOW: Visualizing uncertainty in fluid flow [C] //Proceedings of IEEE Visualization. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 1996: 249-254

[4] Pang A T, Wittenbrink C M, Lodha S K. Approaches to uncertainty visualization [J]. The Visual Computer, 1997, 13 (8): 370-390

[5] Jonson C R, Sanderson A R. A next step: visualizing errors and uncertainty [J]. IEEE Computer Graphics and Applications, 2003, 23(5): 6-10

[6] Benjamini Y. Opening the box of a box plot [J]. The American Statistician, 1998, 42(4): 257-262

[7] Becketti S, Gould W. Rangefinder box plots [J]. The American Statistician, 1987, 41(2): 149-149

[8] Esty W W, Banfield J D. The box-percentile pot [J]. Journal of Statistical Software, 2003, 8(17): 1-14

[9] Choonpradub C, Mcneil D. Can the box plot be improved? [J]. Songklanakarin Journal of Science and Technology, 2005, 27(3): 649-657

[10] Potter K, Kniss J, Riesenfel R, *et al*. Visualizing summary statistics and uncertainty [J]. Computer Graphics Forum, 2010, 29(3): 823-832

[11] Wittenbrink C M, Pang A T, Lodha S K. Glyphs for visualizing uncertainty in vector fields [J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 1996, 2(3): 266-279

[12] Pang A. Visualizing uncertainty in geo-spatial data [OL]. [2012-12-31]. ftp://ftp. cse. ucsc. edu/. zfs/snapshot/110901_monthly/pub/reinas/papers/geo. pdf

[13] Hlawatsch M, Leube P, Nowak W, *et al*. Flow radar glyphs—static visualization of unsteady flow with uncertainty [J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2011, 17(12): 1949-1958

[14] Jiao F, Philips J M, Gur Y, *et al*. Uncertainty visualization in HARDI based on ensembles of ODFs [C] //Proceedings of IEEE Pacific Visualization. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2012: 193-200

[15] Grigoryan G, Rheingans P. Point-based probabilistic surfaces to show surface uncertainty [J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2004, 10(5): 564-573

[16] Rhodes P J, Bergeron R S, Sparr T M. Uncertainty visualization methods in isosurface volume rendering [C] // Proceedings of Eurographics. Aire-la-Ville: Eurographics Association Press, 2003: 83-88

[17] Pauly M, Mitra N J, Guibas L. Uncertainty and variability in point cloud surface data [C] //Proceedings of Eurographics Symposium on Point-Based Graphics. Aire-la-Ville: Eurographics Association Press, 2004: 77-84

[18] Allendes Osorio R S, Brodlie K W. Contouring with uncertainty [C] //Proceedings of Theory and Practice of Computer Graphics. Aire-la-Ville: Eurographics Association Press, 2008: 59-66

[19] Allendes Osorio R S, Brodlie K W. Uncertain flow visualization using LIC [C] //Proceedings of Theory and Practice of Computer Graphics. Aire-la-Ville: Eurographics Association Press, 2009: 1-9

[20] Djurcilov S, Kim K, Lermusiaux P, *et al*. Visualizing scalar volumetric data with uncertainty [J]. Computers & Graphics, 2002, 26(2): 239-248

[21] Dinesha V, Adabala N, Natarajan V. Uncertainty visualization using HDR volume rendering [J]. The Visual Computer, 2012, 28(3): 265-278

[22] Strothotte T, Puhle M, Masuch M B. *et al*. Visualizing uncertainty in virtual reconstructions [C] //Proceedings of EVA Europe. Florence: Computer Arts Society, 1999: 1-16

[23] Lee C H, Varshey A. Representing thermal vibrations and uncertainty in molecular surfaces [C] //Proceedings of SPIE Conference on Visualization and Data Analysis. California: International Society for Optics and Photonics, 2002: 80-90

[24] Coninx A, Bonneau G P, Droulez J, *et al*. Visualization of uncertain scalar data fields using color scales and perceptually adapted noise [C] //Proceedings of the ACM SIGGRAPH Symposium on Applied Perception in Graphics and Visualization. New York: ACM Press, 2011: 59-66

[25] Botchen R P, Weiskopf D, Ertl T. Texture-based visualization of uncertainty in flow fields [C] //Proceedings of IEEE Visualization. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2005: 647-654

[26] Botchen R P, Weiskopf D, Ertl T. Interactive visualization of uncertainty in flow fields using texture-based techniques [R] //Proceedings of the 12th International Symposium on Flow Visualisation. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2006

[27] Zehner B, Watanabe N, Kolditz O. Visualization of gridded scalar data with uncertainty in geosciences [J]. Computers & Geosciences, 2010, 36(10): 1268-1275

[28] Cedilnik A, Rheingans P. Procedural annotation of uncertain information [C] //Proceedings of IEEE Visualization. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2000: 77-84

[29] Livingston M A, Schmidt G S, Rosenblum L J, *et al*. Multi-dimensional visual representations for underwater environmental uncertainty [J]. IEEE Computer Graphics and Applications, 2004, 24(5): 56-65

[30] Pfaffelmoser T, Reitinger M, Westermann R. Visualizing the positional and geometrical variability of isosurfaces in uncertain scalar fields [J]. Computer Graphics Forum, 2011, 30(3): 951-960

[31] Pothkow K, Hege H C. Positional uncertainty of isocontours: condition analysis and probabilistic measures [J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2011, 17(10): 1393-1406

[32] Pothkow K, Weber B, Hege H C. Probabilistic marching cubes [J]. Computer Graphics Forum, 2011, 30(3): 931-940

[33] Wu Y, Yuan G, Ma K. Visualizing flow of uncertainty through analytical processes [J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2012, 18(12): 2526-2535

[34] Potter K, Wilson A, Bremer P T, *et al*. Ensemble-vis: a framework for the statistical visualization of ensemble data [C] //Proceedings of the IEEE International Conference on Data Mining Workshops. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2009: 233-240

[35] Sanyal J, Zhang S, Dyer J, *et al*. Noodles: a tool for visualization of numerical weather model ensemble uncertainty [J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2010, 16(6): 1421-1430

[36] Brown R. Animated visual vibrations as an uncertainty visualisation technique [C] //Proceedings of the 2nd International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. New York: ACM Press, 2004: 84-89

[37] Lundstrom C, Ljung P, Persson A, *et al*. Uncertainty visualization in medical volume rendering using probabilistic animation [J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2007, 13(6): 1648-1655

[38] Dasgupta A, Chen M, Kosara R. Conceptualizing visual uncertainty in parallel coordinates [J]. Computer Graphics Forum, 2012, 32(3pt2): 1015-1024

[39] Peng W, Ward M, Rundensteiner E. Clutter reduction in multi-dimensional data visualization using dimension reordering [C] //Proceedings of IEEE Symposium on Information Visualization. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2004: 89-96

[40] Artero A O, de Oliveira M C F, Levkowitz H. Uncovering clusters in crowded parallel coordinates visualizations [C] //Proceedings of IEEE Symposium on Information Visualization. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2004: 81-88

[41] Zhou H, Yuan X, Qu H, *et al*. Visual clustering in parallel coordinates [J]. Computer Graphics Forum, 2008, 27(3): 1047-1054

[42] Zhou H, Cui W, Qu H, *et al*. Splatting the lines in parallel coordinates [J]. Computer Graphics Forum, 2009, 28(3): 759-766

[43] Novotny M, Hauser H. Outlier-preserving focus + context visualization in parallel coordinates [J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2006, 12(5): 893-900

[44] Otto M, Germer T, Hege H C, *et al*. Uncertain 2D vector field topology [J]. Computer Graphics Forum, 2010, 29(2): 347-356

[45] Otto M, Germer T, Theisel H. Uncertain topology of 3D vector fields [C] //Proceedings of IEEE Pacific Visualization. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2011: 67-74